فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
سال ۳۹، شمارهٔ ۶۶ (بهار و تابستان ۱۳۹۹) صص. ۱۱۵ تا ۱۳۳

عکس قضیهٔ شارکوفسکی

مریم ربیعی و منیره اکبری

چکیده

هدف این مقاله، مطالعهٔ عکس قضیهٔ شارکوفسکی است که می‌گوید به‌ازای هر عدد طبیعی p تابع پیوستهٔ حقیقی روی خط حقیقی وجود دارد که نقطه‌ای تناوبی با دورهٔ تناوب اولیهٔ p دارد ولی به‌ازای هر عدد طبیعی q که در ترتیبِ شارکوفسکی قبل از p ظاهر شده باشد، نقطه‌ای تناوبی با دورهٔ تناوب اولیهٔ q ندارد. در این مقاله، ویژگی‌های چنین تابع‌هایی را بررسی می‌کنیم و آنها می‌سازیم.

۱. سرآغاز

الکساندر میکولایویچ شارکوفسکی[۱] در سال ۱۹۶۴ در [۲۲] قضیه‌ای بسیار مهم دربارهٔ دورهٔ تناوب نقاط تناوبی توابع پیوستهٔ حقیقی روی خط حقیقی ثابت کرد. او در سال ۱۹۶۵ مقالهٔ دیگری [۲۳] منتشر کرد که به‌نوعی کامل‌کنندهٔ [۲۲] بود. هر دو مقاله به زبان روسی نوشته شده بودند و به همین دلیل، تا مدت‌ها ناشناخته ماندند.

فرض کنیم اعداد طبیعی به این‌گونه مرتب شده‌اند که ابتدا اعداد فرد بزرگتر از ۱ به ترتیبِ صعودی در سطر اول نوشته شده‌اند، سپس در سطر دوم، ۲ برابرِ اعداد سطر اول و با ادامهٔ این روند در سطر $l+1$، 2^l برابرِ اعداد سطر اول نوشته شده باشند و در نهایت توان‌های ۲ به ترتیبِ نزولی مرتب شده باشند، به‌طوری که ۲ و سپس ۱ آخرین اعداد در این ترتیب باشند. این ترتیب اعداد طبیعی که در زیر

عبارات و کلمات کلیدی. ترتیبِ شارکوفسکی؛ دور اشتفان؛ دورهٔ تناوب؛ قضیهٔ شارکوفسکی؛ تابع دو برابر ساز.

[۱] Alexander Mikolayevich Sharkovsky

نشان داده شده است، *ترتیبِ شارکوفسکی*[۱] نامیده می‌شود.

$$
\begin{array}{ccccccc}
3 \succ & 5 \succ & 7 \succ & \cdots \succ & 2n-1 \succ & 2n+1 \succ & \cdots \\
2\times 3 \succ & 2\times 5 \succ & 2\times 7 \succ & \cdots \succ & 2\times(2n-1) \succ & 2\times(2n+1) \succ & \cdots \\
2^2\times 3 \succ & 2^2\times 5 \succ & 2^2\times 7 \succ & \cdots \succ & 2^2\times(2n-1) \succ & 2^2\times(2n+1) \succ & \cdots \\
\cdots \succ & \cdots \succ & \cdots \succ & \cdots \succ & \cdots \succ & \cdots \succ & \cdots \\
2^l\times 3 \succ & 2^l\times 5 \succ & 2^l\times 7 \succ & \cdots \succ & 2^l\times(2n-1) \succ & 2^l\times(2n+1) \succ & \cdots \\
2^{l+1}\times 3 \succ & 2^{l+1}\times 5 \succ & 2^{l+1}\times 7 \succ & \cdots \succ & 2^{l+1}\times(2n-1) \succ & 2^{l+1}\times(2n+1) \succ & \cdots \\
\cdots \succ & \cdots \succ & \cdots \succ & \cdots \succ & \cdots \succ & \cdots \succ & \cdots \\
\cdots \succ & 2^{n+1} \succ & 2^n \succ & \cdots \succ & \cdots \succ & 2^2 \succ 2^1 \succ 1 &
\end{array}
$$

اکنون فرض کنیم I یک بازه یا خط حقیقی است. قضیهٔ کامل شارکوفسکی شامل سه بخش زیر است:

قضیه ۱.۱. *فرض کنیم $f : I \to I$ تابعی پیوسته باشد و q و p دو عدد طبیعی باشند که $q \succ p$. در این صورت، اگر f نقطه‌ای تناوبی با دورهٔ تناوب اولیهٔ q داشته باشد، آن‌گاه نقطه‌ای تناوبی با دورهٔ تناوب اولیهٔ p نیز دارد.*

قضیه ۲.۱. *فرض کنیم q و p دو عدد طبیعی باشند که $q \succ p$. در این صورت، تابع حقیقی پیوستهٔ $f : I \to I$ وجود دارد که نقطه‌ای تناوبی با دورهٔ تناوب اولیهٔ p دارد اما هیچ نقطه‌ای تناوبی با دورهٔ تناوب اولیهٔ q ندارد.*

قضیه ۳.۱. *تابع حقیقی پیوستهٔ $f : I \to I$ وجود دارد به‌طوری که به‌ازای هر $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$، نقطه‌ای تناوبی با دورهٔ تناوب اولیهٔ 2^n دارد اما هیچ نقطهٔ تناوبی با دورهٔ تناوب دیگری ندارد.*

شارکوفسکی در [۲۲] قضیهٔ ۱.۱ را ثابت کرد. استدلال‌های ذکر شده در این مقاله، قضیهٔ ۲.۱ را نیز ثابت می‌کند. او در [۲۳] قضیهٔ ۳.۱ را ثابت کرد (برای کسب اطلاعات بیشتر در این زمینه، به [۲۰] مراجعه کنید). امروزه عموماً قضیهٔ ۱.۱ را قضیهٔ شارکوفسکی و قضیه‌های ۲.۱ و ۳.۱ را عکس قضیهٔ شارکوفسکی می‌دانند [۱۲، ۱۷].

قضیهٔ شارکوفسکی تا سال ۱۹۷۵ ناشناخته بود. توجه به قضیهٔ شارکوفسکی در واقع، از سال ۱۹۷۵ بعد از انتشار مقالهٔ لی و یورک [۱۹] شروع شد که شامل حالت خاص قضیهٔ شارکوفسکی است؛ هرچند نویسندگان مقاله در زمان نوشتن آن، از قضیهٔ شارکوفسکی اطلاع نداشتند. مدتی پس از انتشار مقالهٔ [۱۹]، یورک در کنفرانسی در برلین شرقی شرکت کرد. در آنجا طی ملاقاتی با شارکوفسکی، از نتایج وی دربارهٔ دوره‌های تناوب نقاط تناوبی توابع پیوسته روی بازه‌های حقیقی مطلع شد [۱۱]. لی و یورک نشان دادند که اگر تابع پیوستهٔ حقیقی f نقطه‌ای تناوبی با دورهٔ تناوب

[۱] Sharkovsky ordering

اولیهٔ ۳ داشته باشد، آن‌گاه به‌ازای هر عدد طبیعی n، نقطه‌ای تناوبی با دورهٔ تناوب اولیهٔ n دارد. این مطلب با استفاده از قضیهٔ شارکوفسکی بدیهی است، زیرا در ترتیبِ شارکوفسکی عدد ۳ قبل از اعداد طبیعی دیگر آمده است. چند سال بعد از انتشار مقالهٔ لی و یورک، اثباتی از قضیهٔ شارکوفسکی (قضیهٔ ۱.۱) توسط اشتفان[۱] منتشر گردید [۲۵]. سپس اثبات‌های دیگری از این قضیه تقریباً همزمان توسط ریاضیدانان زیادی منتشر شد. برای مثال، به [۹]، [۱۰]، [۱۸] و [۲۶] مراجعه کنید. مقالهٔ شارکوفسکی [۲۲] در سال ۱۹۹۵ به زبان انگلیسی ترجمه شد [۲۴].

در اثبات قضیهٔ شارکوفسکی تنها از قضیهٔ مقدار میانی که نتیجهٔ پیوستگی تابع روی خط حقیقی که یک میدان مرتب کامل است، استفاده می‌شود. بنابراین قضیهٔ شارکوفسکی ممکن است روی سایر فضاها برقرار نباشد. برای مثال، اگر f تابعی پیوسته روی $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ (دایرهٔ واحد) با ضابطهٔ (پیمانهٔ ۱) $f(\theta) = \theta + \frac{p}{q}$ باشد که در آن، p و q اعداد صحیح ناصفر و نسبت به هم اول هستند، آن‌گاه همهٔ نقاط، تناوبی هستند و دورهٔ تناوب اولیهٔ آنها q است. همچنین شرط پیوستگیِ f نیز ضروری است. برای مثال، برای تابع $f : [۰, ۳] \to [۰, ۳]$ با ضابطهٔ

$$f(x) = \begin{cases} x + ۱ & ۰ \leq x \leq ۲ \\ x - ۲ & ۲ < x \leq ۳ \end{cases}$$

همهٔ نقاط بجز ۰، تناوبی با دورهٔ تناوب اولیهٔ ۳ هستند و ۰ *نهایتاً تناوبی* با دورهٔ تناوب اولیهٔ ۳ است.

با توجه به ترتیبِ شارکوفسکی، اگر تابع پیوستهٔ حقیقی f تعداد متناهی نقطهٔ تناوبی داشته باشد، دورهٔ تناوب این نقاط، توان‌هایی از ۲ است. همچنین در قضیهٔ شارکوفسکی، ترتیب قرار گرفتن نقاط مدار تناوبی روی خط حقیقی (چگونگی جایگشت نقاط مدار تناوبی) مهم است. همین امر موجب بررسی جایگشت‌های متناظر با مدارهای تناوبی تابع‌های پیوسته شده است [۳، ۵، ۶، ۷]. به‌طور کلی، بررسی قضیهٔ شارکوفسکی منجر به پیشرفت دینامیک ترکیبیاتی شده است. برای مشاهدهٔ تعمیمی از قضیهٔ شارکوفسکی روی فضاهای توپولوژیک، به [۲۱] و برای مطالعهٔ تعمیمی از آن برای توابع چندمقداری، به [۱، ۲] مراجعه کنید. مقاله‌های متعددی دربارهٔ قضیهٔ شارکوفسکی در نشریهٔ *ماهنامهٔ ریاضی آمریکا*[۲] منتشر شده است؛ از جمله [۴، ۱۱، ۱۳، ۱۴، ۲۰].

عکس قضیهٔ شارکوفسکی (قضیه‌های ۲.۱ و ۳.۱) نیز مورد بررسی قرار گرفته است ولی در برخی از مراجع، بعضی از جزئیات اثبات، بیان نشده است [۱۲، ۱۶، ۱۷]. در این مقاله، هدف ما این است که عکس قضیهٔ شارکوفسکی را با جزئیات کامل‌تر بررسی کنیم تا به نقش ترتیب اعداد حقیقی و پیوستگی تابع تأکید کنیم و با روش‌های ساختن توابع پیوسته با دوره‌های تناوب گوناگون، آشنا

[۱] Štefan [۲] The American Mathematical Monthly

شویم. بدین منظور به دسته‌بندی دوره‌های تناوب و بررسی ویژگی‌های هر دسته می‌پردازیم و سپس توابع پیوستهٔ مورد نظر در عکس قضیهٔ شارکوفسکی را می‌سازیم. با توجه به دسته‌بندی دوره‌های تناوب، از مفاهیمی مانند *دور اشتفان*[۱] و تابع دو برابر ساز[۲] استفاده می‌کنیم.

در بخش ۲ مفاهیم مقدماتی مورد نیاز بیان می‌شود و در بخش ۳ دوره‌های تناوب دسته‌بندی می‌شوند. روش‌های دیگری نیز برای اثبات عکس قضیهٔ شارکوفسکی وجود دارد [۱۱] اما مزیت روش گفته‌شده در این مقاله، ساختنی بودنِ آن است. می‌توان تابع‌های گوناگونی ساخت که نقطه‌ای تناوبی با دورهٔ تناوب اولیهٔ ۳×۲ دارند ولی هیچ نقطه‌ای با دورهٔ تناوب اولیهٔ $۲n+۱$ ندارد. همچنین با استفاده از تابع دو برابر ساز، تابعی ساخته می‌شود که دورهٔ تناوب نقاط تناوبی آن، دو برابرِ دورهٔ تناوب نقاط تناوبی تابع داده شده است. چون روش ساختن تابع دو برابر ساز، منحصر به‌فرد نیست [۱۵]، می‌توان توابع متعددی با این ویژگی ساخت.

۲. مفاهیم مقدماتی

فرض کنیم $f : X \to X$ و $x \in X$. مجموعهٔ $O_f(x) = \{x, f(x), \ldots, f^n(x), \ldots\}$ را که در آن، $f^n = f \circ f^{n-۱}$ و $f^{\circ} = Id$، *مدار*[۳] x تحت f می‌نامیم. نقطهٔ x یک *نقطهٔ تناوبی*[۴] f با دورهٔ تناوب n است اگر $f^n(x) = x$. کوچکترین n با این ویژگی را *دورهٔ تناوب اولیهٔ*[۵] x می‌نامیم. در این حالت، مجموعهٔ $\{x, f(x), \ldots, f^{n-۱}(x)\}$ مدار نقطهٔ تناوبی x یا یک n–دور[۶] نامیده می‌شود. نقطهٔ تناوبی x با دورهٔ تناوب اولیهٔ فرد n را یک *دور اشتفان* می‌نامیم اگر مدار آن دارای ترتیبِ

$$f^{n-۱}(x) < f^{n-۳}(x) < \cdots < f^{۲}(x) < x < f(x) < f^{۳}(x) < \cdots < f^{n-۲}(x)$$

و یا ترتیبِ

$$f^{n-۲}(x) < \cdots < f^{۳}(x) < f(x) < x < f^{۲}(x) < \cdots < f^{n-۳}(x) < f^{n-۱}(x)$$

باشد [۸]. اگر $n = ۱$ نقطهٔ x، *نقطهٔ ثابت*[۷] f نامیده می‌شود. x را یک نقطهٔ *نهایتاً تناوبی*[۸] f با دورهٔ تناوب اولیهٔ n می‌نامیم اگر x تناوبی نباشد ولی به‌ازای یک $k \geq ۱$، $f^k(x)$ نقطه‌ای تناوبی با دورهٔ تناوب اولیهٔ n باشد. بدیهی است که اگر x یک نقطهٔ تناوبی f با دورهٔ تناوب n باشد، آنگاه n مضربی از دورهٔ تناوب اولیهٔ x است. همچنین اگر x یک نقطهٔ تناوبی f با دورهٔ تناوب اولیهٔ n باشد، آنگاه به‌ازای هر t، $۱ \leq t \leq n-۱$، $f^t(x)$ نقطه‌ای تناوبی با دورهٔ تناوب اولیهٔ n است.

[۱] $\check{S}$tefan cycle [۲] doubling function [۳] orbit [۴] periodic point [۵] prime period [۶] n-cycle [۷] fixed point [۸] eventually periodic

گزاره ۱.۲ ([۱۲]). *گیریم f تابعی پیوسته و I بازه‌ای بسته و کراندار باشد به‌طوری‌که $f(I) \supseteq I$. در این صورت، f دست‌کم یک نقطهٔ ثابت در I دارد.*

گزاره ۲.۲ ([۱۷]). *فرض کنیم f تابعی پیوسته و I و J بازه‌هایی بسته و کراندار باشند به‌طوری‌که $f(I) \supseteq J$. در این صورت، بازهٔ بستهٔ $A \subseteq I$ موجود است به‌طوری‌که $f(A) = J$.*

برای نمایش $f(I) \supseteq J$ از نماد $I \to J$ و همچنین برای نمایش $f(x) = y$ از نماد $x \mapsto y$ استفاده می‌کنیم.

نتیجه ۳.۲ ([۱۷]). *فرض کنیم f تابعی پیوسته و I_i، $1 \leq i \leq n$، بازه‌های بسته و کراندار باشند به‌طوری‌که*

$$I_1 \to \cdots \to I_n \to I_1.$$

در این صورت، نقطهٔ تناوبی $x \in I_1$ با دورهٔ تناوب n وجود دارد که به‌ازای هر j، $1 \leq j \leq n-1$، داریم $f^j(x) \in I_{j+1}$.

۳. عکس قضیهٔ شارکوفسکی

در این بخش، به بررسی عکس قضیهٔ شارکوفسکی می‌پردازیم. نخست برای $p \in \mathbb{N}$ به بررسی ویژگی‌های تابع پیوسته‌ای می‌پردازیم که نقطه‌ای تناوبی با دورهٔ تناوب اولیهٔ p دارد ولی به‌ازای هر q که $q \succ p$ نقطه‌ای تناوبی با دورهٔ تناوب اولیهٔ q ندارد. با توجه به قضیهٔ شارکوفسکی، کافی است دوره‌های تناوب را به‌صورت زیر دسته‌بندی کنیم.

حالت ۱: به‌ازای هر $n \geq 2$، تابع پیوستهٔ f وجود دارد که نقطه‌ای تناوبی با دورهٔ تناوب اولیهٔ $2n+1$ دارد ولی هیچ نقطه‌ای با دورهٔ تناوب اولیهٔ $2n-1$ ندارد؛

حالت ۲: به‌ازای هر $n \geq 1$، تابع پیوستهٔ f وجود دارد که نقطه‌ای تناوبی با دورهٔ تناوب اولیهٔ 2×3 دارد ولی هیچ نقطه‌ای با دورهٔ تناوب اولیهٔ $2n+1$ ندارد؛

حالت ۳: به‌ازای هر $n \geq 2$ و هر $l \geq 1$، تابع پیوستهٔ f وجود دارد که نقطه‌ای تناوبی با دورهٔ تناوب اولیهٔ $2^l \times (2n+1)$ دارد ولی هیچ نقطه‌ای با دورهٔ تناوب اولیهٔ $2^l \times (2n-1)$ ندارد؛

حالت ۴: به‌ازای هر $l \geq 1$، تابع پیوستهٔ f وجود دارد که نقطه‌ای تناوبی با دورهٔ تناوب اولیهٔ $2^{l+1} \times 3$ دارد ولی به‌ازای هر $n \geq 1$، هیچ نقطه‌ای با دورهٔ تناوب اولیهٔ $2^l \times (2n+1)$ ندارد؛

حالت ۵: به‌ازای هر $n \geq ۰$، تابع پیوستهٔ f وجود دارد که نقطه‌ای تناوبی با دورهٔ تناوب اولیهٔ ۲^n دارد ولی هیچ نقطه‌ای با دورهٔ تناوب اولیهٔ $۲^{n+۱}$ ندارد؛

حالت ۶: تابع پیوستهٔ f وجود دارد که به‌ازای هر $m \geq ۰$، نقطه‌ای تناوبی با دورهٔ تناوب اولیهٔ ۲^m دارد ولی هیچ نقطه‌ای با دورهٔ تناوب اولیهٔ $(۲n+۱) \times ۲^l$ به‌ازای هر $l \geq ۰$ و هر $n \geq ۱$، ندارد.

۱.۳. بررسی حالت ۱. فرض می‌کنیم به‌ازای $n \geq ۲$، تابع پیوستهٔ f نقطه‌ای تناوبی با دورهٔ تناوب اولیهٔ $۲n+۱$ دارد ولی هیچ نقطه تناوبی با دورهٔ تناوب اولیهٔ $۲n-۱$ ندارد. اعضای این مدار تناوبی را به ترتیبِ صعودی به‌صورت

$$x_۱ < x_۲ < x_۳ < \cdots < x_{۲n+۱}$$

مرتب می‌کنیم. روشن است که $f(x_۱) > x_۱$ و $f(x_{۲n+۱}) < x_{۲n+۱}$. فرض می‌کنیم i بزرگترین اندیسی باشد که $f(x_i) > x_i$. بنابراین $f(x_{i+۱}) < x_{i+۱}$. لذا داریم

$$f(x_{i+۱}) \leq x_i < x_{i+۱} \leq f(x_i). \qquad (۱.۳)$$

قرار می‌دهیم $I_۱ = [x_i, x_{i+۱}]$. در این صورت، با توجه به (۱.۳) و با استفاده از قضیهٔ مقدار میانی، داریم

$$I_۱ \subseteq [f(x_{i+۱}), f(x_i)] \subseteq f[x_i, x_{i+۱}] = f(I_۱). \qquad (۲.۳)$$

لذا $I_۱ \to I_۱$. چون دورهٔ تناوب x_i دو نیست، $f(x_i) = x_{i+۱}$ و $f(x_{i+۱}) = x_i$ هم‌زمان اتفاق نمی‌افتد. با توجه به (۱.۳)، داریم $f(x_i) > x_{i+۱}$ یا $f(x_{i+۱}) < x_i$ که در هر دو صورت، $f(I_۱)$ شامل نقطهٔ دیگری از مدار تناوبی متمایز از x_i و $x_{i+۱}$ است. بنابراین $f(I_۱)$ شامل بازهٔ دیگری به‌صورت $[x_j, x_{j+۱}]$ متمایز از $I_۱$ است. آن را $I_۲$ می‌نامیم. در این صورت،

$$I_۱ \neq I_۲, \qquad f(I_۱) \supset I_۲. \qquad (۳.۳)$$

قرار می‌دهیم $C_۱ = I_۱$ و فرض می‌کنیم $C_۲$ اجتماع همهٔ بازه‌هایی به‌صورت $[x_j, x_{j+۱}]$ باشد که $f(C_۱)$ شامل آنها است. پس با توجه به (۲.۳) و (۳.۳)، داریم

$$I_۱ \cup I_۲ \subseteq C_۲ \subseteq f(C_۱).$$

فرض می‌کنیم به‌ازای $k \geq ۲$، $C_۱$، ...، C_k ساخته شده باشند به‌طوری که

$$I_۱ \cup I_۲ \subseteq C_۲ \subseteq \cdots \subseteq C_{k-۱} \subseteq C_k \subseteq f(C_{k-۱}). \qquad (۴.۳)$$

اکنون $C_{k+۱}$ را اجتماع همهٔ بازه‌های $[x_j, x_{j+۱}]$ می‌گیریم که زیرمجموعهٔ تصویر بازه‌ای به‌صورت $[x_l, x_{l+۱}] \subseteq C_k$ هستند. بنابر (۴.۳)، $C_k \subseteq f(C_{k-۱}) \subseteq f(C_k)$ و لذا

$$C_k \subseteq C_{k+۱} \subseteq f(C_k).$$

به‌علاوه، با توجه به روش ساخت C_kها، برای هر بازهٔ I_{j_k} به‌صورت $[x_j, x_{j+۱}]$ در C_k، $k \geq ۲$، دنبالهٔ

$$I_۱ \to I_{j_۲} \to \cdots \to I_{j_{k-۱}} \to I_{j_k}$$

موجود است به‌طوری که به‌ازای $۲ \leq i \leq k$، $I_{j_i} \subseteq C_i$.

چون $۲n$ بازه به‌صورت $[x_j, x_{j+۱}]$ داریم، $l \leq ۲n$ وجود دارد به‌طوری که $C_l = C_{l+۱}$. بنابراین $C_l = [x_۱, x_{۲n+۱}]$. اگرنه دورهٔ تناوب اولیهٔ $x_۱$ کمتر از $۲n + ۱$ خواهد بود. از طرف دیگر، چون $۲n + ۱$ عددی فرد است، اگر a نقطهٔ میانی $I_۱$ باشد، تعداد نقاط مدار $x_۱$ در دو طرفِ a با هم برابر نیست. بنابراین دو نقطهٔ متوالی x_j و $x_{j+۱}$ در یک طرف a وجود دارند به‌طوری که $f(x_j)$ و $f(x_{j+۱})$ در دو طرف a واقع هستند. در این حالت، قرار می‌دهیم $I_t = [x_j, x_{j+۱}]$. بنابراین $f(I_t) \supset I_۱$ و لذا $I_t \to I_۱$. با توجه به این بحث، دنبالهٔ

$$I_۱ \to I_۲ \to \cdots \to I_t \to I_۱ \qquad (۵.۳)$$

وجود دارد. فرض کنیم

$$I_۱ \to I_۲ \to \cdots \to I_t \qquad (۶.۳)$$

یک *دنبالهٔ مینیمال*[۱] باشد؛ یعنی $I_k \to \cdots \to I_k$، $k \geq ۱$، در دنبالهٔ (۶.۳) ظاهر نشده باشد. این فرض امکان پذیر است، زیرا در صورت ظهور چنین دنباله‌ای می‌توانیم I_k را جایگزین آن دنباله کنیم. برای i و j که $۱ \leq i,\ j \leq t$ و $i \neq j$ در (۵.۳) داریم $I_i \neq I_j$. اکنون نشان می‌دهیم که $t = ۲n$. روشن است که $t \leq ۲n$. حال اگر $t < ۲n$، دنبالهٔ

$$I_۱ \to I_۲ \to \cdots \to I_t \to I_۱ \to \underbrace{I_۱ \to \cdots \to I_۱}_{\text{بار } ۲n-t-۱}$$

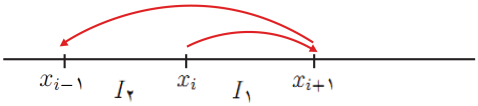
[۱] minimal sequence

را در نظر می‌گیریم. از نتیجهٔ ۳.۲ و مینیمال بودنِ دنبالهٔ (۶.۳)، وجودِ یک نقطهٔ تناوبی با دورهٔ تناوب اولیهٔ $۲n-۱$ حاصل می‌شود که تناقض است. پس $t=۲n$. بنابراین دنبالهٔ

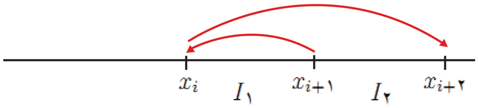
$$I_۱ \to I_۲ \to \cdots \to I_{۲n-۱} \to I_{۲n} \to I_۱. \tag{۷.۳}$$

یک دنبالهٔ مینیمال است که در آن، تمام بازه‌های به‌شکل $[x_j, x_{j+۱}]$ که $۱ \leq j \leq ۲n$ وجود دارند. لذا $f(I_۱)$ تنها شامل $I_۱$ و $I_۲$ است. در نتیجه فقط یکی از دو حالت زیر می‌تواند اتفاق بیفتد (شکل ۱).

(i)



(ii)



شکل ۱. حالت‌های ممکنِ قرارگرفتن $I_۱$ و $I_۲$ در کنارِ هم.

(i) $f(x_i) = x_{i+۱}$، $f(x_{i+۱}) = x_{i-۱}$، $I_۲ = [x_{i-۱}, x_i]$؛

(ii) $f(x_i) = x_{i+۲}$، $f(x_{i+۱}) = x_i$، $I_۲ = [x_{i+۱}, x_{i+۲}]$.

در ادامه نشان می‌دهیم در هر دو حالت، یک دور اشتفان داریم. فرض می‌کنیم حالت (i) برقرار باشد. بررسی حالت (ii) به‌طور مشابه انجام می‌پذیرد. با استقرا نشان می‌دهیم که به‌ازای $۰ \leq \ell \leq n-۱$ داریم

$$f(x_{i-\ell}) = x_{i+\ell+۱},\ f(x_{i+\ell+۱}) = x_{i-\ell-۱},$$

$$I_{۲\ell+۱} = [x_{i+\ell}, x_{i+\ell+۱}],\ I_{۲\ell+۲} = [x_{i-\ell-۱}, x_{i-\ell}].$$

با توجه به حالت (i)، روابط بالا برای $\ell=۰$ برقرار است. گیریم این روابط به‌ازای $۰ \leq \ell \leq k-۱$ برقرار باشد. به‌ویژه برای $\ell = k-۱$ داریم

$$f(x_{i-k+۱}) = x_{i+k},\ f(x_{i+k}) = x_{i-k},$$

$$I_{۲k-۱} = [x_{i+k-۱}, x_{i+k}],\ I_{۲k} = [x_{i-k}, x_{i-k+۱}].$$

با توجه به مینیمال بودنِ (۷.۳) و عدم وجود نقطهٔ تناوبی با دورهٔ تناوب اولیهٔ $۲n-۱$، $f(I_{۲k})$ باید تنها شامل $I_{۲k+۱}$ باشد. پس بنابر $f(x_{i-k+۱})=x_{i+k}$، باید داشته باشیم

$$f(x_{i-k})=x_{i+k+۱},\ I_{۲k+۱}=[x_{i+k},x_{i+k+۱}].$$

همچنین $f(I_{۲k+۱})$ باید تنها شامل $I_{۲k+۲}$ باشد که با توجه به $f(x_{i+k})=x_{i-k}$، باید داشته باشیم

$$f(x_{i+k+۱})=x_{i-k-۱},\ I_{۲k+۲}=[x_{i-k-۱},x_{i-k}].$$

بنابراین به‌ازای $\ell=n-۱$ داریم

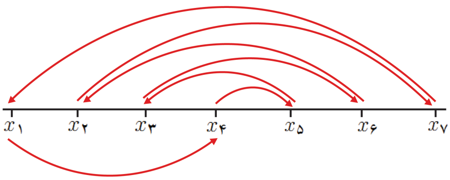
$$f(x_{i-n+۱})=x_{i+n},\ f(x_{i+n})=x_{i-n}, \tag{۸.۳}$$

$$I_{۲n-۱}=[x_{i+n-۱},x_{i+n}],\ I_{۲n}=[x_{i-n},x_{i-n+۱}]. \tag{۹.۳}$$

از سوی دیگر، با توجه به نحوهٔ نامگذاری I_jها باید $I_{۲n}=[x_۱,x_۲]$. از مقایسه با (۹.۳) نتیجه می‌گیریم که $i-n=۱$ و با جایگذاری در (۸.۳)، به‌دست می‌آوریم $f(x_۲)=x_{۲n+۱}$ و $f(x_{۲n+۱})=x_۱$. به این ترتیب،

$$x_{n+۱}\mapsto x_{n+۲}\mapsto x_n\mapsto x_{n+۳}\mapsto x_{n-۱}\mapsto\cdots\mapsto x_۲\mapsto x_{۲n+۱}\mapsto x_۱$$

و در نتیجه $f(x_۱)=x_{n+۱}$؛ یعنی یک دور اشتفان داریم (به‌ازای $n=۳$ شکل ۲ را ببینید). توجه



شکل ۲. مدار نقطهٔ $x_۱$ در حالت $n=۳$ که یک دور اشتفان را نشان می‌دهد.

کنید که در هر دو حالت (i) و (ii) داریم

$$f(I_{۲n})\supseteq I_۱\cup I_۳\cup I_۵\cup\cdots\cup I_{۲n-۱}.$$

اکنون با فرضِ $n\geq ۲$، با توجه به مطالب ذکر شده، تابعی می‌سازیم که یک نقطهٔ تناوبی با دورهٔ تناوب اولیهٔ $۲n+۱$ داشته باشد ولی هیچ نقطهٔ تناوبی با دورهٔ تناوب اولیهٔ $۲n-۱$ نداشته باشد.

فرض می‌کنیم به‌ازای $0 \leq \ell \leq n-1$،

$$I_{2\ell+1} = [n+\ell+1, n+\ell+2],\ I_{2\ell+2} = [n-\ell, n-\ell+1].$$

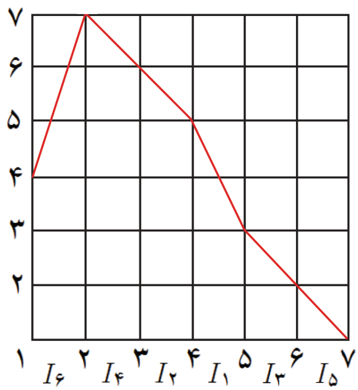
تابع پیوستهٔ *تکه‌ای-خطی*[1]

$$f : [1, 2n+1] \to [1, 2n+1]$$

را به گونه‌ای تعریف می‌کنیم که به‌ازای $0 \leq \ell \leq n-1$،

$$f(n+1-\ell) = n+\ell+2,\ f(n+\ell+2) = n-\ell,\ f(1) = n+1$$

و تحدید نمودار f به هر زیربازهٔ I_j، یک پاره‌خط باشد (در حالت $n = 3$ شکل ۳ را ببینید). در نتیجه



شکل ۳. نمودار f به‌ازای $n = 3$.

$$f(I_1) = I_1 \cup I_2, \tag{۱۰.۳}$$

$$f(I_k) = I_{k+1}, \qquad 2 \leq k \leq 2n-1, \tag{۱۱.۳}$$

$$f(I_{2n}) = \bigcup_{\ell=0}^{n-1} I_{2\ell+1}. \tag{۱۲.۳}$$

توجه کنید که کافی است تحدید نمودار f به هر زیربازه، پیوسته باشد نه لزوماً یک پاره‌خط که ساده‌ترین تعریف است. اکنون نشان می‌دهیم که f هیچ نقطهٔ تناوبی با دورهٔ تناوب اولیهٔ $2n-1$ ندارد. با استفاده از (۱۰.۳) و (۱۱.۳)، داریم $I_1 \supseteq \bigcup_{i=1}^{2n} I_i = f^{2n-1}(I_1)$. پس بنابر گزارهٔ ۱.۲، f دارای

[1]piecewise linear function

نقطه‌ای تناوبی مانند a با دورهٔ تناوب $۲n-۱$ در $I_۱$ است. همچنین بنابر (۱۰.۳)، f دارای یک نقطهٔ ثابت مانند b در $I_۱$ است. بنابراین $f^{۲n-۱}(b)=b$. از طرفی، تابع f روی هر بازهٔ I_j که $j\neq ۲n$، اکیداً نزولی است و روی $I_{۲n}$ اکیداً صعودی است. در نتیجه با توجه به روابط (۱۰.۳) و (۱۱.۳)، $f^{۲n-۱}$ روی $I_۱$ اکیداً نزولی است. چون هر تابع اکیداً نزولی حداکثر یک نقطهٔ ثابت دارد، $a=b$. پس دورهٔ تناوب اولیهٔ a برابر ۱ است. بنابراین f در $I_۱$ نقطهٔ تناوبی با دورهٔ تناوب اولیهٔ $۲n-۱$ ندارد.

حال گیریم f دارای نقطه‌ای تناوبی مانند c با دورهٔ تناوب اولیهٔ $۲n-۱$ در $I_{۲n}$ باشد، یعنی

$$c=f^{۲n-۱}(c)\in I_{۲n}. \tag{۱۳.۳}$$

با توجه به (۱۲.۳) و اینکه f در $I_۱$ نقطهٔ تناوبی با دورهٔ تناوب اولیهٔ $۲n-۱$ ندارد، نتیجه می‌گیریم که $f(c)\in\bigcup_{\ell=۱}^{n-۱}I_{۲\ell+۱}$. به‌استقرای ریاضی، فرض می‌کنیم رابطهٔ $f^{۲l-۱}(c)\in\bigcup_{\ell=۱}^{n-۱}I_{۲\ell+۱}$ برقرار است. از (۱۱.۳) نتیجه می‌گیریم که $f^{۲l}(c)\in\bigcup_{\ell=۲}^{n}I_{۲\ell}$. بنابراین با استفاده از (۱۱.۳) و (۱۲.۳) به‌دست می‌آوریم $f^{۲l+۱}(c)\in\bigcup_{\ell=۱}^{n-۱}I_{۲\ell+۱}$. به‌ویژه $f^{۲n-۱}(c)\in\bigcup_{\ell=۱}^{n-۱}I_{۲\ell+۱}$ که با (۱۳.۳) در تناقض است.

چون بنابر (۱۱.۳)، برای هر $۲\leq k\leq ۲n-۱$، داریم $f^{۲n-k}(I_k)=I_{۲n}$، نقطهٔ تناوبی با دورهٔ تناوب $۲n-۱$ در I_k نیز وجود ندارد. بنابراین تابع ساخته‌شده، نقطه‌ای تناوبی با دورهٔ تناوب اولیهٔ $۲n+۱$ دارد ولی هیچ نقطهٔ تناوبی با دورهٔ تناوب اولیهٔ $۲n-۱$ ندارد.

۲.۳. بررسی حالت ۲. در این بخش، تابعی معرفی می‌کنیم که نقطه‌ای با دورهٔ تناوب اولیهٔ ۶ دارد اما دارای هیچ نقطهٔ تناوبی با دورهٔ تناوب اولیهٔ فرد بزرگتر از ۱ نیست. نخست فرض کنیم f نقطه‌ای تناوبی با دورهٔ تناوب اولیهٔ زوج دارد ولی هیچ نقطهٔ تناوبی با دورهٔ تناوب اولیهٔ فرد بزرگتر از ۱ ندارد و فرض کنیم اعضای این مدار تناوبی به‌صورت

$$x_۱<x_۲<\cdots<x_{۲n}$$

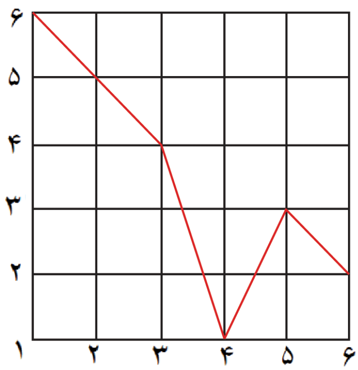
مرتب شده باشند. مشابه بحث زیربخش ۱.۳، $I_۱=[x_i,x_{i+۱}]$ را به گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که i بزرگترین اندیسی باشد که $f(x_i)>x_i$. پس $f(x_{i+۱})<x_{i+۱}$ و $I_۱\to I_۱$. فرض می‌کنیم a نقطهٔ میانی $I_۱$ باشد. اگر دونقطهٔ متوالی مدار $x_۱$ در یک طرفِ a موجود باشند به‌طوری که تصاویر آنها در دو طرفِ a قرارگیرد، دنبالهٔ مینیمال

$$I_۱\to I_۲\to\cdots\to I_t\to I_۱ \tag{۱۴.۳}$$

را مشابهٔ زیربخش ۱.۳ می‌سازیم. در این صورت، اگر t عددی فرد باشد، آن‌گاه دنبالهٔ (۱۴.۳) وگرنه دنبالهٔ

$$I_1 \to I_2 \to \cdots \to I_t \to I_1 \to I_1 \tag{۱۵.۳}$$

وجودِ یک نقطهٔ تناوبی با دورهٔ تناوب اولیهٔ فرد را تضمین می‌کند که تناقض است.



شکل ۴.نمودار تابعی که نقطه‌ای تناوبی با دورهٔ تناوب اولیهٔ ۶ دارد ولی هیچ نقطهٔ تناوبی با دورهٔ تناوب اولیهٔ فرد بزرگتر از ۱ ندارد.

لذا تعداد نقاط مدار x_1 در دو طرفِ a مساوی هستند. بنابراین $I_1 = [x_n, x_{n+1}]$ و به‌علاوه،

$$f(\{x_1, \dots, x_n\}) = \{x_{n+1}, \dots, x_{2n}\}.$$

در نتیجه

$$f(\{x_{n+1}, \dots, x_{2n}\}) = \{x_1, \dots, x_n\}.$$

بنابراین برای تعریف تابعی که نقطه‌ای با دورهٔ تناوب اولیهٔ ۶ دارد اما دارای هیچ نقطهٔ تناوبی با دورهٔ تناوب اولیهٔ فرد بزرگتر از ۱ نیست، باید

$f(\{x_4, x_5, x_6\}) = \{x_1, x_2, x_3\}$ و $f(\{x_1, x_2, x_3\}) = \{x_4, x_5, x_6\}$.

بر این اساس، تابع $f : [1, 6] \to [1, 6]$ را به گونه‌ای تعریف می‌کنیم که

$$f(1) = 6,\ f(2) = 5,\ f(3) = 4,\ f(4) = 1,\ f(5) = 3,\ f(6) = 2 \tag{۱۶.۳}$$

و نمودار f در بازهٔ $[i, i+1]$ یک پاره‌خط باشد (شکل ۴). با توجه به اینکه

$$f([1, 3]) = [4, 6], \qquad f([4, 6]) = [1, 3],$$

f در $[۴,۶] \cup [۱,۳]$ نقطهٔ تناوبی با دورهٔ تناوب فرد ندارد. به‌علاوه، $-۳ = \left(f|_{[۳,۴]}\right)'$. لذا مدار هر نقطهٔ واقع در $[۳,۴]$ (به‌استثنای نقطهٔ ثابت) نهایتاً از این بازه خارج می‌شود و هیچ‌گاه مجدداً به آن برنمی‌گردد. پس f در بازهٔ $[۳,۴]$ دارای هیچ نقطهٔ تناوبی با دورهٔ تناوب بزرگتر از ۱ نیست. لذا f نقطه‌ای با دورهٔ تناوب اولیهٔ ۶ دارد اما هیچ نقطهٔ تناوبی با دورهٔ تناوب اولیهٔ فرد بزرگتر از ۱ ندارد.

تابع تعریف شده در (۱۶.۳) یگانه نیست. هر تابع دیگری با این ویژگی که $\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ تشکیل یک ۶–دور دهد، $f(\{۱,۲,۳\}) = \{۴,۵,۶\}$ و $f(\{۴,۵,۶\}) = \{۱,۲,۳\}$ می‌تواند در نظر گرفته شود. برای مثال، ۶–دور

$$۳ \mapsto ۴ \mapsto ۲ \mapsto ۵ \mapsto ۱ \mapsto ۶ \mapsto ۳$$

و یا ۶–دور

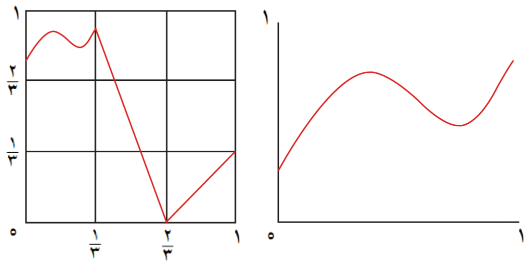
$$۴ \mapsto ۳ \mapsto ۵ \mapsto ۲ \mapsto ۶ \mapsto ۱ \mapsto ۴$$

نیز را می‌توان در نظر گرفت.

۳.۳. بررسی حالت های ۳، ۴ و ۵.

فرض کنیم $f : [۰,۱] \to [۰,۱]$ تابعی پیوسته باشد. ابتدا به معرفی تابع F که دورهٔ تناوب نقاط تناوبی آن دو برابرِ دورهٔ تناوب نقاط تناوبی f است، می‌پردازیم. تابع F را «دو برابر سازِ f» می‌نامیم و به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم (شکل ۵).

$$F(x) = \begin{cases} \frac{۱}{۳}f(۳x) + \frac{۲}{۳} & ۰ \leq x \leq \frac{۱}{۳} \\ -۳F(\frac{۱}{۳})(x - \frac{۲}{۳}) & \frac{۱}{۳} \leq x \leq \frac{۲}{۳} \\ x - \frac{۲}{۳} & \frac{۲}{۳} \leq x \leq ۱ \end{cases} \tag{۱۷.۳}$$



شکل ۵. سمت راست نمودار f و سمت چپ دو برابر سازِ آن را نشان می‌دهد.

توجه کنید که

$$F([۰, \frac{۱}{۳}]) \subseteq [\frac{۲}{۳}, ۱], \qquad F([\frac{۲}{۳}, ۱]) = [۰, \frac{۱}{۳}] \tag{۱۸.۳}$$

و به‌علاوه، $۲ \geq \left|\left(F|_{[\frac{۱}{۳},\frac{۲}{۳}]}\right)'\right|$. لذا مدار هر نقطهٔ واقع در $[\frac{۱}{۳}, \frac{۲}{۳}]$ (به‌استثنای نقطهٔ ثابت) نهایتاً از این بازه خارج می‌شود و هیچ‌گاه مجدداً به آن برنمی‌گردد. پس نقاط تناوبی با دورهٔ تناوب بزرگتر از ۱ تابع F، در صورت وجود، در $[۰, \frac{۱}{۳}] \cup [\frac{۲}{۳}, ۱]$ قرار دارند و دورهٔ تناوب آنها عددی زوج است. با استفاده از (۱۷.۳) و استقرای ریاضی، لم زیر که رابطهٔ بین مدار x تحت f و مدار $\frac{x}{۳}$ تحت دو برابر سازِ آن را نشان می‌دهد، نتیجه می‌شود.

لم ۱.۳. *فرض کنیم $f : [۰, ۱] \to [۰, ۱]$ تابعی پیوسته باشد و فرض کنیم F دو برابر سازِ f باشد. در این صورت،*

$$F^n(\frac{x}{۳}) = \begin{cases} \frac{۱}{۳} f^{\frac{n+۱}{۲}}(x) + \frac{۲}{۳} & \text{عددی فرد است } n \\ \frac{۱}{۳} f^{\frac{n}{۲}}(x) & \text{عددی زوج است } n \end{cases}$$

با توجه به لم ۱.۳ که نشان می‌دهد $F^{۲n}(\frac{x}{۳}) = \frac{۱}{۳} f^n(x)$، نتیجهٔ زیر را به‌دست می‌آوریم.

نتیجه ۲.۳. *نقطهٔ x نقطهٔ تناوبی تابع f با دورهٔ تناوب n است اگر و تنها اگر $\frac{x}{۳}$ نقطهٔ تناوبی تابع دو برابر سازِ آن با دورهٔ تناوب $۲n$ باشد.*

با استفاده از لم ۱.۳، نتیجهٔ زیر نیز که در زیربخش ۴.۳ برای بررسی حالت ۶ به‌کار می‌رود، حاصل می‌شود.

نتیجه ۳.۳. *فرض کنیم f و g توابعی پیوسته از $[۰, ۱]$ به $[۰, ۱]$ باشند و F دو برابر سازِ f و G دو برابر سازِ g باشد. اگر $O_f(x) = O_g(x)$، آن‌گاه داریم $O_F(\frac{x}{۳}) = O_G(\frac{x}{۳})$.*

اکنون با توجه به مطالب بالا، به بررسی حالت‌های ۳، ۴ و ۵ می‌پردازیم.

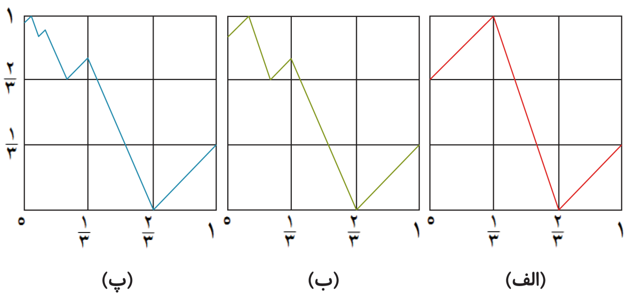
بررسی حالت ۳: در زیربخش ۱.۳ تابعی پیوسته ساختیم که نقطه‌ای تناوبی با دورهٔ تناوب $۲n + ۱$ دارد ولی هیچ نقطهٔ تناوبی با دورهٔ تناوب $۲n - ۱$ ندارد. با l بار ساختنِ دو برابر سازِ این تابع، تابعی پیوسته به‌دست می‌آید که نقطه‌ای تناوبی با دورهٔ تناوب $۲^l \times (۲n + ۱)$ دارد ولی هیچ نقطهٔ تناوبی با دورهٔ تناوب $۲^l \times (۲n - ۱)$ ندارد.

بررسی حالت ۴: در زیربخش ۲.۳ تابعی پیوسته معرفی کردیم که نقطه‌ای تناوبی با دورهٔ تناوب ۶ دارد ولی هیچ نقطهٔ تناوبی با دورهٔ تناوب $2n+1$ به‌ازای هر $n \in \mathbb{N}$ ندارد. با l بار ساختنِ دو برابر سازِ این تابع، تابعی پیوسته به‌دست می‌آید که نقطه ای تناوبی با دورهٔ تناوب $2^{l+1} \times 3 = 2^l \times 6$ دارد ولی هیچ نقطهٔ تناوبی با دورهٔ تناوب $2^l \times (2n+1)$ ندارد.

بررسی حالت ۵: فرض می‌کنیم $f : [0,1] \to [0,1]$ تابع همانی یا هر تابع پیوستهٔ صعودی و پوشای دیگری باشد. دو برابر سازِ f را n بار به‌دست می‌آوریم. بدین ترتیب تابعی به‌دست می‌آید که نقطه‌ای تناوبی با دورهٔ تناوب اولیهٔ 2^n دارد ولی هیچ نقطهٔ تناوبی با دورهٔ تناوب اولیهٔ 2^{n+1} ندارد.

۴.۳. بررسی حالت ۶. در این بخش، تابعی پیوسته معرفی می‌کنیم که به‌ازای هر $m \geq 0$، نقطه‌ای تناوبی با دورهٔ تناوب اولیهٔ 2^m دارد ولی هیچ نقطه‌ای با دورهٔ تناوب اولیهٔ $2^l \times (2n+1)$ به‌ازای هر $l \geq 0$ و هر $n \geq 1$، ندارد.

نخست فرض کنیم $F_0 : [0,1] \to [0,1]$ تابع همانی باشد. دنبالهٔ $(F_n)_{n\geq 1}$ را که در آن، F_1 دو برابر سازِ F_0 و به‌ازای $n \geq 1$، F_{n+1} دو برابر سازِ F_n است، در نظر می‌گیریم (شکل ۶). نشان می‌دهیم که این دنباله یک دنبالهٔ یکنواخت–کُشی[1] است و در نتیجه دارای حد است. سپس ثابت می‌کنیم این تابع حدی، ویژگی‌های مورد نظر را دارد.



شکل ۶. از راست به چپ به‌ترتیب، نمودار توابع F_1 ، F_2 و F_3

لم ۴.۳. *فرض کنیم $(F_n)_{n\geq 1}$ دنباله‌ای باشد که در بالا تعریف شده است. در این صورت،*

(الف) اگر $n \geq m \geq 1$ و $x \in [\frac{2}{3^m}, 1]$، آن‌گاه $F_n(x) = F_m(x)$؛

(ب) اگر $n \geq m \geq 1$ و $x \in [0,1]$، آن‌گاه $|F_n(x) - F_m(x)| \leq \frac{1}{3^m}$.

[1] uniformly Cauchy sequence

اثبات. (الف) ابتدا توجه کنید که به‌ازای $n \geq ۱$ داریم

$$F_n(x) = \begin{cases} \frac{۱}{۳}F_{n-۱}(۳x) + \frac{۲}{۳} & ۰ \leq x \leq \frac{۱}{۳} \\ -۳F_n(\frac{۱}{۳})(x - \frac{۲}{۳}) & \frac{۱}{۳} \leq x \leq \frac{۲}{۳} \\ x - \frac{۲}{۳} & \frac{۲}{۳} \leq x \leq ۱ \end{cases} \tag{۱۹.۳}$$

پس به‌ازای هر $n \geq ۱$ روی بازهٔ $[\frac{۲}{۳}, ۱]$، داریم $F_n = F_۱$. پس لم به‌ازای $m = ۱$ برقرار است. فرض می‌کنیم لم به‌ازای هر n که $n \geq m$ برقرار باشد و $n \geq m + ۱$ و $x \in [\frac{۲}{۳m+۱}, ۱]$. در این صورت، $n - ۱ \geq m$. از (۱۹.۳) و با توجه به اینکه روی $[\frac{۲}{۳m}, ۱]$ داریم $F_{n-۱} = F_m$، به‌دست می‌آوریم

$$F_n(x) = \begin{cases} \frac{۱}{۳}F_{n-۱}(۳x) + \frac{۲}{۳} & ۰ \leq x \leq \frac{۲}{۳m+۱} \\ \frac{۱}{۳}F_m(۳x) + \frac{۲}{۳} & \frac{۲}{۳m+۱} \leq x \leq \frac{۱}{۳} \\ -۳F_n(\frac{۱}{۳})(x - \frac{۲}{۳}) & \frac{۱}{۳} \leq x \leq \frac{۲}{۳} \\ x - \frac{۲}{۳} & \frac{۲}{۳} \leq x \leq ۱ \end{cases} \tag{۲۰.۳}$$

همچنین $F_n(\frac{۱}{۳}) = \frac{۱}{۳}F_{n-۱}(۱) + \frac{۲}{۳} = \frac{۱}{۳}F_m(۱) + \frac{۲}{۳} = F_{m+۱}(\frac{۱}{۳})$. با جایگذاری رابطهٔ اخیر در (۲۰.۳) و استفاده از تعریف $F_{m+۱}$، نتیجه می‌گیریم که

$$F_n(x) = \begin{cases} \frac{۱}{۳}F_{n-۱}(۳x) + \frac{۲}{۳} & ۰ \leq x \leq \frac{۲}{۳m+۱} \\ F_{m+۱}(x) & \frac{۲}{۳m+۱} \leq x \leq ۱ \end{cases} \tag{۲۱.۳}$$

بنابراین قسمت اول لم ثابت می‌شود.
(ب) برای اثبات قسمت دوم لم، ابتدا با استقرا نشان می‌دهیم که به‌ازای $n \geq ۱$،

$$|F_n(x) - F_{n-۱}(x)| \leq \frac{۲}{۳n}. \tag{۲۲.۳}$$

با استفاده از (۱۹.۳)، به‌ازای $n = ۱$ داریم

$$|F_۱(x) - F_۰(x)| = |F_۱(x) - x| \leq \frac{۲}{۳}$$

و همچنین به‌ازای $n \geq ۲$، با توجه به قسمت اول لم،

$$|F_n(x) - F_{n-۱}(x)| = \begin{cases} \frac{۱}{۳}|F_{n-۱}(۳x) - F_{n-۲}(۳x)| & ۰ \leq x \leq \frac{۱}{۳} \\ ۳|F_n(\frac{۱}{۳}) - F_{n-۱}(\frac{۱}{۳})||x - \frac{۲}{۳}| & \frac{۱}{۳} \leq x \leq \frac{۲}{۳} \\ ۰ & \frac{۲}{۳} \leq x \leq ۱ \end{cases}$$

اکنون با استفاده از فرض استقرا و اینکه

$$|F_n(\frac{۱}{۳}) - F_{n-۱}(\frac{۱}{۳})| = \frac{۱}{۳}|F_{n-۱}(۱) - F_{n-۲}(۱)| \leq \frac{۲}{۳^n},$$

(۲۲.۳) ثابت می‌شود. حال به‌کمک (۲۲.۳)، برای $۱ \leq m \leq n$ به‌دست می‌آوریم

$$|F_n(x) - F_m(x)| \leq \sum_{i=m}^{n-۱} |F_i(x) - F_{i+۱}(x)| \leq \sum_{i=m}^{n-۱} \frac{۲}{۳^{i+۱}} \leq \frac{۱}{۳^m}.$$

به این ترتیب، قسمت دوم لم نیز ثابت می‌شود. □

لم ۴.۳ نشان می‌دهد که دنبالهٔ $(F_n)_{n \geq ۱}$ از توابع پیوسته، یکنواخت–همگرا[۱] است و در نتیجه $f = \lim_{n\to\infty} F_n$ موجود و تابعی پیوسته است. در ادامه نشان می‌دهیم که f دارای همهٔ دوره‌های تناوب اولیه به‌صورت ۲^m، $m \geq ۰$، است و دارای هیچ نقطهٔ تناوبی با دورهٔ تناوب دیگری نیست. با توجه به روش ساختن F_nها، چون $x = \frac{۷}{۱۵}$ نقطهٔ ثابت $F_۲$ است، پس بنابر قسمت اول لم ۴.۳، به‌ازای $n \geq ۲$، نقطهٔ $x = \frac{۷}{۱۵}$ نقطهٔ ثابت همهٔ F_nها است. توجه کنید که $x = \frac{۷}{۱۵}$ در بازهٔ $[\frac{۲}{۳۲}, ۱]$ قرار دارد. با توجه به نتایج ۲.۳ و ۳.۳، $x = \frac{۷}{۱۵\times۳}$ نقطهٔ تناوبی با دورهٔ تناوب اولیهٔ $۲^۱$ برای F_nها به‌ازای $n \geq ۳$، است و $O_{F_n}(\frac{۷}{۱۵\times۳}) = O_{F_۳}(\frac{۷}{۱۵\times۳})$. استفاده از استقرای ریاضی و نتایج ۲.۳ و ۳.۳، نشان می‌دهد که $x = \frac{۷}{۱۵\times۳^k}$ نقطهٔ تناوبی با دورهٔ تناوب اولیهٔ ۲^k برای F_nها به‌ازای $n \geq k+۲$ است و $O_{F_n}(\frac{۷}{۱۵\times۳^k}) = O_{F_{k+۲}}(\frac{۷}{۱۵\times۳^k})$. پس $f = \lim_{n\to\infty} F_n$ دارای همهٔ دوره‌های تناوب به‌صورت ۲^m است.

اکنون نشان می‌دهیم که f دارای هیچ نقطهٔ تناوبی با دورهٔ تناوب دیگری نیست. فرض کنیم $f^l(x_۰) = x_۰$ و l به‌صورت ۲^ℓ نباشد. در این صورت، برای هر $۱ \leq k \leq l$، $f^k(x_۰) \neq ۰$، زیرا حدگیری از رابطهٔ ۱۹.۳ نشان می‌دهد که دو برابر سازِ f با خودش برابر است. بنابراین اگر ۰ نقطهٔ تناوبی f با دورهٔ تناوب اولیهٔ $l \geq ۱$ باشد، آن‌گاه ۰ باید نقطهٔ تناوبی f با دورهٔ تناوب اولیهٔ $۲l$ نیز باشد که تناقض است. حال مدار $x_۰$ تحت f را در نظر بگیرید. با توجه به متناهی بودن این مدار و اینکه اعضای آن همگی ناصفر هستند، n را به اندازهٔ کافی بزرگ اختیار می‌کنیم به‌طوری که

[۱] uniformly convergent

$O_f(x_\circ) \subset [\frac{۲}{۳n}, ۱]$. چون روی $[\frac{۲}{۳n}, ۱]$ داریم $f = F_n$، پس $x_\circ$ نقطهٔ تناوبی F_n است که یک تناقض است، زیرا نقاط تناوبی F_n فقط به‌صورت ۲^n هستند. بنابراین دورهٔ تناوب نقاط تناوبی f فقط به‌صورت ۲^m است.

مراجع

[1] Andres, J., Fišer, J., Jüttner, L., On a multivalued version of the Sharkovskii theorem and its application to differential inclusions, *Set-Valued Analysis,* **10** (2002), 1–14.

[2] Andres, J., Jüttner, L., Pastor, K., On a multivalued version of the Sharkovskii theorem and its application to differential inclusions, II, *Set-Valued Analysis,* **13** (2005), 47–68.

[3] Baldwin, S., Generalizations of a theorem of Sarkovskii on orbits of continuous real-valued functions, *Discrete Mathematics,* **67** (1987), 111–127

[4] Barton, R., Burns, K., A simple special case of Sharkovskii's theorem, *The American Mathematical Monthly,* **107** no. 10 (2000), 932–933.

[5] Bernhardt, C., Simple permutations with order a power of two, *Ergodic Theory and Dynamical Systems,* **4** (1984), 179–186.

[6] Bernhardt, C., The ordering on permutations induced by continuous maps of the real line, *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, **7** (1987), 155–160.

[7] Bernhardt, C., Sharkovsky's theorem and one-dimensional combinatorial dynamics, (2012), arXiv:1201.3583 v1.

[8] Block, L. S., Coppel, W. A., *Dynamics in one dimension,* Springer-Verlag, New York, Berlin, 1992.

[9] Block, L., Guckenheimer, J., Misiurewicz, M., Young, L. S., Periodic points and topological entropy of one dimensional maps, *Global Theory of Dynamical Systems, Lecture Notes in Mathematics,* **819** Springer, Berline, 1980, 18–34.

[10] Burkart, U., Interval mapping graphs and periodic points of continuous functions, *Journal of Combinatorial Theory, Series B,* **32** (1982), 57–68.

[11] Burns, K., Hasseblatt, B., The Sharkovsky theorem: A natural direct proof, *The American Mathematical Monthly* **118** (2011), no. 3, 229–244.

[12] Devaney, R., *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems,* 2nd edn., CRC Press, 2003.

[13] Du, B. S., A simple proof of Sharkovsky's theorem, *The American Mathematical Monthly,* **111** (2004), no. 7, 595–599.

[14] Du, B. S., A simple proof of Sharkovsky's theorem revisited, *The American Mathematical Monthly,* **114** (2007), no. 2, 152–155.

[15] Du, B. S., A simple proof of Sharkovsky's theorem revisited, (2009), arXiv: 0711.3892v7.

[16] Elaydi, S. N., On a converse of Sharkovsky's theorem, *The American Mathematical Monthly,* **103** (1996), no. 5, 386–392.

[17] Elaydi, S. N., *Discrete Chaos, with Applications in Science and Engineering,* 2nd edn., Chapman & Hall/CRC, 2007.

[18] Ho, C. W., Morris, C., A graph theoretic proof of Sharkovsky's theorem on the periodic points of continuous functions, *Pacific Journal of Mathematics,* **96** (1981), 361–370.

[19] Li, T. Y., Yorke, J., Period three implies chaos, *The American Mathematical Monthly,* **82** (1975), 985–992.

[20] Misiurewicz, M., Remarks on Sharkovsky's theorem, *The American Mathematical Monthly,* **104** (1997), no. 9, 846–847.

[21] Schirmer, H., A topologist's view of Sharkovsky's theorem, *Houston Journal of Mathematics,* **11** (1985), no. 3, 385–395.

[22] Sharkovsky, A. N., Co-existence of the cycles of a continuous mapping of the line into itself, *Ukrainskiy Matematicheskiy Zhurnal,* **16** (1964), no. 1, 61–71 (in Russian).

[23] Sharkovsky, A. N., On cycles and structure of a continuous mapping, *Ukrainskiy Matematicheskiy Zhurnal,* **17** (1965), no. 3, 104–111 (Russian).

[24] Sharkovsky, A. N., Co-existence of the cycles of a continuous mapping of the line into itself, *International Journal of Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering,* **5** (1995), 1263–1273.

[25] *Š*tefan, P., A theorem of *Š*arkovskii on the existence of periodic orbits of continuous endomorphisms of the real line, *Communications in Mathematical Physics,* **54** (1977), no. 3, 237–248.

[26] Straffin, Jr. P. D., Periodic points of continuous functions, *Mathematics Magazine,* **51** (1978), no. 2, 99–105.

تاریخ ارسال: ۱۳۹۷/۸/۲۳؛ تاریخ بازنگری: ۱۳۹۷/۹/۲۱؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۷/۹/۲۳

مریم ربیعی: دانشگاه الزهرا، دانشکدهٔ علوم ریاضی
رایانامه: mrabii@alzahra.ac.ir

منیره اکبری: دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی، دانشکدهٔ علوم پایه
رایانامه: akbari@sru.ac.ir