فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
سال ۳۹، شمارهٔ ۶۶ (بهار و تابستان ۱۳۹۹) صص. ۱۳۵ تا ۱۴۵

سیر تکامل نظریهٔ گروه‌ها تا رده‌بندی گروه‌های سادهٔ متناهی

محمدرضا درفشه

چکیده

نظریهٔ گروه‌ها یکی از بنیادی‌ترین و کاربردی‌ترین شاخه‌های جبر است. مفهوم گروه در فرآیند حل یکی از قدیمی‌ترین مسائل ریاضی یعنی حل معادلات جبری به‌وجود آمد. از مهم‌ترین شاخه‌های نظریهٔ گروه‌ها، گروه‌های جایگشتی و نظریهٔ نمایش گروه‌ها است که هر دو، شاخه‌های پژوهشی فعالی هستند. گروه‌های ساده در مرکز پژوهش‌های کنونیِ نظریهٔ گروه‌ها قرار دارد. بسیاری از سؤال‌های عمیق دربارهٔ گروه‌های متناهی به سؤال‌هایی مشابه دربارهٔ گروه‌های ساده یا تقریباً ساده منجر می‌شود و اینجا است که رده‌بندی گروه‌های سادهٔ متناهی کاربرد پیدا می‌کند. در این نوشته، سعی کرده‌ایم ضمن بررسی تکامل نظریهٔ گروه‌ها، به مسئلهٔ رده‌بندی گروه‌های سادهٔ متناهی و کاربرد آن بپردازیم.

۱. سرآغاز

«نظریهٔ گروه‌ها که گالوا (همچنین کُشی و لاگرانژ) واضع آن بود، از جمله نظریه‌های ریاضی است که به‌طور حیرت‌انگیزی پُربار است. این نظریه علاوه بر آنکه موضوع معادلات جبری را کاملاً روشن کرد، وسیله‌ای بسیار خوب و قوی به دست فیزیکدانان قرن بیستم داد. بدون شک، برای من ممکن نیست که شما را وارد علمی کنم که ورود به آن همچون رموز کیمیاگران، قدغن و مشکل است و گذشته از آن، موضوع به‌طور غیر عادی خشک و مجرّد است اما یک مثال ساده، تصوّر واضح‌تری از موضوع به شما خواهد داد و می‌توانید از آستانهٔ این معبر، ثروت‌های بی‌مانندی را که در داخل آن نهان است، به تصوّر درآورید. اگر مورد کاربرد نظریهٔ گروه‌ها فقط محدود به حل معادلات جبری بود، باز هم ارزش آن عظیم و مهم می‌نمود اما وسعت و اهمیت آن، به‌مراتب بیشتر از این است. گالوا نظریهٔ گروه‌ها را در مورد جبر

به‌کار برد، کلاین آن را در هندسه مورد استفاده قرار داد، سوفوس لی آن را در حساب دیفرانسیل وارد کرد و فیزیکدانان نظری در نظریاتشان از آن بهره گرفتند.» [۱] موضوع نظریهٔ گروه‌ها منحصر به جبر و هندسه و فیزیک نظری و حساب دیفرانسیل نیست، بلکه نظریهٔ گروه‌ها امروزه در مدخل ریاضیات قرار دارد و هر کس که بخواهد در یکی از رشته‌های علمی و فنی مطالعه عمیق داشته باشد، ناگزیر باید آن را بیاموزد و مورد استفاده قرار دهد [۱].

شکل‌گیری نظریهٔ گروه‌ها از سال ۱۷۷۰ م. آغاز شد و تا قرن بیستم ادامه پیدا کرد و بیشتر مطالب آن در قرن ۱۹ توسعه یافت. عمده‌ترین علل این توسعه را می‌توان در ارائهٔ اثبات‌های دقیق، مجرّدسازی، ظهور روش اصل موضوعی دانست. تا حدود اواخر قرن هجدهم، جبر عمدتاً مطالعهٔ حل معادلات چندجمله‌ای بود اما در قرن بیستم، جبر به مطالعهٔ دستگاه‌های مجرّد به روش اصل‌موضوعی تبدیل شد و این انتقال از جبرِ کلاسیک معادلات چندجمله‌ای، به جبرِ به‌اصطلاح جدید، دستگاه‌های مجرّد را در قرن نوزدهم پدید آورد. علاوه بر نظریهٔ گروه‌ها، ساختار حلقه‌های جابه‌جایی، هیأت‌ها، حلقه‌های ناجابه‌جایی و فضاهای برداری نیز پا به عرصه وجود نهادند و همهٔ این‌ها به موازات نظریهٔ گروه‌ها و گاهی هم در تداخل با آن، رشد کردند. نظریهٔ گالوا مخلوطی از هر دو نظریهٔ گروه‌ها و هیأت‌ها است؛ نظریهٔ نمایش گروه مخلوطی از نظریهٔ گروه‌ها، جبر ناجابه‌جایی و جبرخطی است.

چهار منبع عمده در تکامل نظریهٔ گروه‌ها همراه با نام پدید آورندهٔ آنها را به‌ترتیبِ زیر می‌توان ذکر کرد: جبر کلاسیک (لاگرانژ ۱۷۷۰ م.)، نظریهٔ اعداد (گاوس ۱۸۰۱ م.)، هندسه (کلاین ۱۸۷۴ م.) و آنالیز (لی ۱۸۷۴ م.، پوآنکاره و کلاین ۱۸۷۶م.). در ادامه به‌اختصار به هر یک از موارد فوق اشاره می‌شود.

۱.۱. جبر کلاسیک. در حدود ۱۶۰۰ سال پیش از میلاد، بابلی‌ها می‌دانستند که چگونه با روش کامل کردنِ مربع، معادلهٔ درجه‌دو را حل کنند و روش‌های جبری برای حل معادلات درجه‌سه و درجه‌چهار حدوداً در ۱۵۴۰ م. ارائه شد. یکی از مسائل اصلی برای دو قرن بعد، حل معادلهٔ درجه‌پنج بود که لاگرانژ در مقاله‌ای به سال ۱۷۷۰ م. مطرح کرد تا برای نخستین بار، پیوندی میان حل یک معادلهٔ چندجمله‌ای و جایگشت‌های ریشه‌های آن برقرار کند. در واقع، مطالعهٔ جایگشت‌های ریشه‌های یک معادله، سنگ بنای نظریهٔ عمومی لاگرانژ برای معادلات جبری بود. سؤالاتی از قبیل اینکه: آیا هر معادله دارای ریشه است؟ چند ریشه دارد؟ آیا ریشه‌ها حقیقی، مختلط، مثبت یا منفی‌اند؟ نیز مطرح شد. در مقالهٔ سال ۱۷۷۰ م.، لاگرانژ تلاش خود را وقف حل معادلهٔ درجه‌پنج کرد. او ابتدا روش‌های شناخته‌شدهٔ پیشین که توسط ریاضیدانان شاخصی چون اویلر، دکارت و دیگران دربارهٔ حل معادلات درجه‌سه و درجه‌چهار ارائه شده بود، مطالعه کرد و مشاهده نمود که نقطهٔ اشتراک این روش‌ها، تحویل چنین معادلاتی به معادلات کمکی است. چنین معادلات کمکی درجه‌شان کمتر از درجهٔ معادلات اصلی است. با وجود اینکه لاگرانژ در مسئلهٔ حل‌پذیریِ معادلهٔ درجه‌پنج موفق نشد، روش او سنگ‌بنای پژوهش‌هایی مهم گردید. نخستین بار

در اثر لاگرانژ، تناظری بین حل معادلهٔ درجه‌پنج و جایگشت ریشه‌های آن مطرح گردید. هرچند صحبتی از محاسبات جایگشتی نظیر ترکیب جایگشت‌ها در کار او نیست، می‌توان گفت که روح نظریهٔ گروه‌ها در کارش حضور داشته است.

۲.۱. نظریهٔ اعداد. در کتاب معروف *تحقیقات حسابی* که گاوس آن را در سال ۱۸۰۱ م. منتشر کرد، مطالبی دیده می‌شود که می‌توان گاوس را مبتکر نظریهٔ گروه‌های آبلی متناهی دانست بدون اینکه از تعاریف متداول نظریهٔ گروه‌ها استفاده کرده باشد. این گروه‌ها عبارت‌اند از گروه جمعی اعداد صحیح به پیمانهٔ m، گروه ضربی اعداد صحیح که نسبت به m اول هستند به پیمانهٔ m، گروه رده‌های هم‌ارزی فرم‌های درجه‌دو و گروه ریشه‌های nاُم واحد. برای مثال، گاوس نشان داد که اگر p یک عدد اول فرض شود، آن‌گاه عضوهای مجموعهٔ اعداد صحیح به پیمانهٔ p و ناصفر که با $\mathbb{Z}_p^*$ نمایش داده می‌شود، همگی مساوی توانی از یک عدد واحد است، یعنی گروه $\mathbb{Z}_p^*$ دوری است. به‌علاوه گاوس تعداد مولدهای این گروه را معین کرد. برای هر عضو از $\mathbb{Z}_p^*$، او مرتبهٔ عضو را تعریف کرد و نشان داد که مرتبهٔ هر عضو، عدد $p-۱$ را عاد می‌کند.

گاوس نشان داد که ریشه‌های nاُم واحد، تشکیل گروه دوری می‌دهند. مسئلهٔ نمایش اعداد صحیح با فرم‌های دوتاییِ درجه‌دو به زمان فرما برمی‌گردد. یک فرم دوتایی درجه‌دو، فرمی به‌شکل $ax^۲+bxy+cy^۲$ است که a، b و c اعداد صحیح‌اند. گاوس روی مجموعهٔ همهٔ این فرم‌ها قانون ترکیب تعریف می‌کند و نشان می‌دهد که این قانون شرکت‌پذیر و جابه‌جایی است، همچنین عضو خنثی و وارون هر عضو وجود دارد. به این ترتیب، همهٔ ویژگی‌های گروه آبلی را بررسی می‌نماید. با وجود این، نمی‌توان تصریح کرد که گاوس مفهوم گروه مجرّد یا حتی گروه آبلی مجرّد را درک کرده است.

۳.۱. هندسه. در برنامه‌ای که کلاین در سال ۱۸۷۲ م. در دانشگاه ارلانگن اعلام کرد و به برنامه ارلانگن معروف شد، هندسه را به‌عنوان مطالعهٔ پایاها تحت گروه تبدیلات، رده‌بندی نمود. پس از آن، گروه‌هایی مانند گروه تصویری، گروه حرکات صلب، گروه تشابهات، گروه هذلولوی، گروه بیضوی و هندسه‌های وابسته به این گروه‌ها، پدید آمد. قرن نوزدهم شاهد رشدی انفجارآمیز در هندسه بود. هندسه‌های جدید مانند هندسهٔ تصویری، هندسهٔ نااقلیدسی، هندسهٔ دیفرانسیل، هندسهٔ جبری، هندسهٔ n -بُعدی و هندسهٔ گراسمانی به‌وجود آمد. در اواسط قرن، مسئلهٔ عمدهٔ پیوند درونیِ این هندسه‌های متفاوت و روش‌های هندسی مطرح شد که این، منجر به مطالعهٔ روابط هندسی با تأکید بر مطالعهٔ ویژگی‌های شکل‌هایی شد که تحت تبدیلات پایا می‌مانند. به‌زودی مطالعهٔ خودِ تبدیلات نیز آغاز شد. به این ترتیب، انواع گوناگونی از تبدیلات، موضوع مطالعات تخصصی شد. در نتیجه ارتباط منطقی بین این تبدیلات، مورد بحث قرار

گرفت و سرانجام، به همنهادی نظریهٔ گروهیِ کلاین انجامید. به عقیدهٔ ریاضیدانان، برنامهٔ ارلانگنِ کلاین، به‌صراحت سمت و سوی نظریهٔ گروهی داشته است.

۴.۱. آنالیز. در سال ۱۸۷۴ م. لی نظریهٔ عمومی گروه تبدیلات پیوسته را معرفی کرد، چیزی که امروزه اساساً گروه لی نامیده می‌شود. در واقع، لی فکر می‌کرد که دنباله‌روی آبل و گالوا است و آنچه را دربارهٔ معادلات دیفرانسیل انجام می‌دهد که آنها دربارهٔ معادلات جبری انجام دادند. پژوهش‌های او سپس به سمت مطالعهٔ معادلات دیفرانسیل در حالت کلی سوق یافت که تحت یک گروه پیوسته پایا باشند و سپس از مطالعهٔ ویژگی‌های معلوم این گروه‌ها، نتایجی برای حل این معادلات به‌دست آورد. با وجود اینکه لی در شکل دادنِ به نظریهٔ گالوای معادلات دیفرانسیل موفق نبود، پژوهش‌های او در صورت‌بندی این نظریه نقشی اساس ایفا کرد.

۲. مجرّدسازی در نظریهٔ گروه‌ها

تقریباً صد سال پس از زمانی که در سال ۱۷۷۰ م. لاگرانژ پژوهش‌های خود دربارهٔ نظریهٔ گروه‌ها را آغاز کرد، مفهوم گروه مجرّد به وجود آمد. در سال ۱۸۵۴ م. کیلی در یکی از مقالاتش اولین تعریف مجرّد از یک گروه متناهی را ارائه داد و سپس مثال‌هایی متعدد از گروه ارائه کردمانند کواترنیون‌ها، جایگشت‌ها و گروه‌هایی که در نظریهٔ توابع بیضوی ظاهر می‌شوند. او نشان داد که هر گروه مجرّد با زیرگروهی از یک گروه جایگشتی یکریخت است؛ چیزی که امروزه با عنوان *قضیهٔ کیلی* معروف است. همچنین جدول ضرب یک گروه متناهی را تعریف کرد و نشان داد هر گروه متناهی با داشتن جدول ضرب خود، کاملاً معیّن می‌شود. سپس همهٔ گروه‌ها از مرتبهٔ ۴ و ۶ را با تقریب یکریختی، کاملاً مشخص ساخت. هرچند مجرّدسازیِ گروه توسط کیلی در زمان خودش توجه کسی را به خود جلب نکرد، تقریباً ۲۵ سال بعد، چنین تعریفی مورد توجه قرار گرفت و خودِ کیلی بود که در سال ۱۸۷۸ م. چهار مقاله دربارهٔ گروه با استفاده از تعریف مجرّدِ آن نوشت. او مسئلهٔ یافتن گروه‌های از مرتبهٔ داده‌شده را طرح کرد. ریاضیدان دیگری که تعریف مجرّد گروه چه متناهی و چه نامتناهی را ارائه داد، فون دیک بود که گروه را توسط مولدها و روابط تعریف نمود. چنین صورت‌بندی، یک *نمایهٔ گروه* نامیده می‌شود. او گروه آزاد با n مولد را ساخت (گروه آزاد از رتبهٔ n) و نشان داد که هر گروه متناهیاً تولیدشده، تصویر همریخت یک گروه آزاد از رتبهٔ متناهی است.

نظریهٔ مجرّد گروه طی سی تا چهل سال بعد، استحکام بیشتری یافت و در حدود سال ۱۹۲۰ م. می‌توان مشاهده کرد که نظریهٔ گروه‌ها به شاخه‌های جدیدتری انشعاب یافته است که تعدادی از آنها عبارت‌اند از: نظریهٔ گروه‌های متناهی، توسیع نتایج از نظریهٔ گروه‌های متناهی به گروه‌های نامتناهی با استفاده از شرایط متناهی‌گونه، نمایهٔ گروه‌ها (نظریهٔ ترکیبیاتی گروه‌ها)، نظریهٔ گروه‌های آبلی نامتناهی، نظریهٔ توسیع گروه‌ها،

گروه‌های جبری، گروه‌های توپولوژیک، توسیع نظریهٔ نمایش گروه‌ها به گروه‌های پیوسته و نظریهٔ نمایش و سرشت گروه‌های متناهی.

۳. گروه‌های سادهٔ متناهی

همان‌طور که ذکر شد، یکی از مسائل اصلی در نظریهٔ گروه‌های متناهی، یافتن همهٔ گروه‌های ساده است. گروه نابدیهی G را *ساده* می‌نامیم اگر تنها زیرگروه‌های نرمالش $\{e\}$ و G باشند. اکنون فرض کنیم G یک گروه متناهی است و $H \trianglelefteq G$ نمایانگر نرمال بودن زیرگروه H در G باشد. یک *سری زیرنرمال* برای G عبارت است از دنبالهٔ زیر از زیرگروه‌های G:

$$\{e\} = G_۰ \trianglelefteq G_۱ \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq G_n = G$$

و خانوادهٔ عامل‌های سری عبارت است از $\{G_{i+۱}/G_i \mid ۰ \leqslant i < n\}$. توجه کنید که سری بالا ماکسیمال است (یعنی نمی‌توانیم زیرگروه اضافی بین G_i و $G_{i+۱}$ قرار دهیم) اگر و تنها اگر عامل‌های سری، گروه‌های ساده باشند. سری ماکسیمال، *سری ترکیبی* نامیده می‌شود و داریم

قضیه ۱.۳ (ژُردان–هولدر). *همهٔ سری‌های ترکیبی برای G دارای طول مساوی هستند و خانوادهٔ عامل‌های ساده‌شان یکریخت است.*

عامل‌های ساده در سری ترکیبی را *عامل‌های ترکیبی* G می‌نامیم. این عامل‌ها با تقریب یکریختی، G را معین نمی‌سازند اما نقش کنترل‌کننده بر ساختار G دارند. بنابراین گروه‌های ساده دارای نقشی همانند اعداد اول در نظریهٔ اعداد هستند و لذا گروه‌های ساده را *آجرهای ساختمانی* گروه‌های متناهی می‌نامند. می‌توان ساختن گروه‌های متناهی را منوط به حل دو مسئلهٔ زیر کرد:

مسئلهٔ رده‌بندی. همهٔ گروه‌های سادهٔ متناهی را معین کنید.

مسئلهٔ توسیع. فرض کنیم A و B دو گروه باشند. همهٔ گروه‌های متناهی G با زیرگروه نرمال H را رده‌بندی کنید که $A \cong H$ و $G/H \cong B$. در این صورت گوییم G توسیعی از A توسط B است.

مسئلهٔ توسیع در حالت کلی مسئله‌ای دشوار است. اما ساختار گروه متناهی G بستگی به حل این مسئله دارد. اگر سری ترکیبی برای G را در نظر بگیریم، دیده می‌شود که $G_۱$ و $G_۲/G_۱$ گروه‌های ساده هستند و لذا اگر $G_۲/G_۱ = B$، آنگاه $G_۲$ توسیعی از $G_۱$ توسط B است. لذا ساختار $G_۲$ بستگی به توسیع گروه سادهٔ $G_۱$ توسط گروه سادهٔ B دارد. به‌استقرا دیده می‌شود که G توسیع دنباله‌ای از گروه‌های ساده توسط گروه‌های ساده است. بنابراین اگر مسئلهٔ توسیع برای گروه‌های ساده حل شود، ساختار گروه G معین می‌گردد. اهمیت مسئلهٔ رده‌بندی گروه‌های سادهٔ متناهی از اینجا معلوم می‌شود. در سال ۱۹۸۱ م. اعلام شد که قضیهٔ رده‌بندی به‌ترتیبِ زیر ثابت شده است:

قضیه ۲.۳ (رده‌بندی گروه‌های سادهٔ متناهی). *هر گروه سادهٔ متناهی با یکی از گروه‌های زیر یکریخت است:*

(۱) گروهی از مرتبهٔ عددی اول؛
(۲) گروه متناوب؛
(۳) گروه‌های کلاسیک از نوع لی: $A_n(q)$ ، $B_n(q)$ ، $C_n(q)$ ، $D_n(q)$ ، $E_6(q)$ ، $E_7(q)$ ، $E_8(q)$ ، $F_4(q)$ ، $G_2(q)$ *که n یک عدد صحیح مثبت و q توانی از یک عدد اول است؛*
(۳') گروه‌های استثنایی از نوع لی: ${}^2A_n(q)$ ، ${}^2B_n(q)$ ، ${}^2D_n(q)$ ، ${}^2D_4(q)$ ، ${}^2G_2(q)$ ، ${}^2F_4(q)$ ، ${}^2E_6(q)$؛
(۴) یکی از ۲۶ گروه پراکنده: M_{11} ، M_{12} ، M_{22} ، M_{23} ، M_{24} ، J_1 ، J_2 ، J_3 ، J_4 ، Hs ، He ، Mc ، Suz ، Ly ، Ru ، $O'N$ ، Co_1 ، Co_2 ، Co_3 ، Fi_{22} ، Fi_{23} ، Fi_{24} ، F_5 ، F_3 ، F_2 ، F_1.

گروه‌های معرفی‌شده در ۱، همان گروه‌های دوری $\mathbb{Z}_p$ هستند که p عددی اول است. چون تعداد اعداد اول نامتناهی است، تعداد چنین گروه‌هایی عددی نامتناهی است. گروه‌های عنوان شده در ۲، عبارت است از مجموعهٔ همهٔ جایگشت‌های زوج در گروه متقارن $\mathbb{S}_n$، $n \geq ۵$، که با $\mathbb{A}_n$ نمایش داده می‌شود. بنابراین تعداد نامتناهی گروه ساده $\mathbb{A}_n$، $n \geq ۵$، وجود دارد. *گروه سادهٔ پراکنده* به گروهی اطلاق می‌شود که در هیچ خانوادهٔ نامتناهی از گروه‌ها نگنجد. ثابت شده است که تنها ۲۶ گروه سادهٔ پراکنده وجود دارد که کوچکترینِ آنها گروه ماتیو M_{11} از مرتبهٔ ۷۹۲۰ و بزرگترینِ آنها گروهی به نام *هیولا* از مرتبهٔ

$$۸۰۸۰۱۷۴۲۴۷۹۴۵۱۲۸۷۵۸۸۶۴۵۹۹۰۴۹۶۱۷۱۰۷۵۷۰۰۵۷۵۴۳۶۸۰۰۰۰۰۰۰۰۰$$

است. گروه‌های ساده از نوع لی چنین تعریف می‌شوند: این گروه‌ها در ۱۶ خانوادهٔ نامتناهی از گروه‌های ساده واقع می‌شوند که به یک میدان F با q عضو و عدد n که بُعد یک فضای برداری است، بستگی دارند. این گروه‌ها به‌تفصیل در مرجع [۳] تشریح شده‌اند و از توضیح مجدد آنها اجتناب می‌کنیم.

در اینجا مایلیم که سرخط‌های کلی و خط سیر تاریخی منجر به رده‌بندی گروه‌های سادهٔ متناهی را مختصراً بیان کنیم. در سال ۱۸۳۲ م. زیرگروه نرمال توسط گالوا معرفی شد و او گروه‌های جایگشتی را در کارهای پژوهشیِ خود وارد کرد اما معرفی صریح گروه‌های جایگشتی توسط ژُردان در سال ۱۸۷۰ م. صورت گرفت که ثابت کرد گروه‌های متناوب A_n، $n \geqslant ۵$، و گروه‌های تصویری خاص در بُعد ۲ روی میدان‌های از مرتبهٔ اول، ساده هستند. حکم‌های مشهور سیلو در سال ۱۸۷۲ م. ارائه شد که بیان می‌دارد هر گروه متناهی که مرتبه‌اش توسط عدد اولی مانند p عاد شود، دارای زیرگروهی از مرتبهٔ توانی از عدد p است که مرتبهٔ گروه را عاد می‌کند؛ البته این حکم نخستین بار، برای گروه‌های جایگشتی ثابت شد و

سپس به گروه‌های دلخواه تعمیم داده شد. اولین گروه‌های سادهٔ پراکنده عبارت بودند از گروه‌های ماتیو که در سال‌های ۱۸۶۱ تا ۱۸۷۳ م. ظاهر شدند. در فاصلهٔ زمانیِ ۱۹۰۱–۱۹۰۳ م. چند گروه ساده از نوع لی توسط دیکسون کشف گردید اما کار اساسی شواله در دههٔ ۱۹۵۰، منجر به ساختن خانوادهٔ جدید گروه‌های ساده از نوع لی و مطالعهٔ سازمان‌یافته و متحد گروه‌های کلاسیک و استثنایی از نوع لی با الهام از گروه‌های سادهٔ لیِ پیوسته شد. در سال ۱۹۵۹ م. پژوهش‌های استاینبرگ در مورد ساختار گروه‌های لی استثنایی پیچیده که در گروه‌های پیوسته نظیری نداشتند و پیرو آن، کشف خانوادهٔ جدیدی از گروه‌های ساده توسط استاینبرگ، سوزوکی و ری انجام شد. اما حدسیّهٔ برنساید که تامپسون آن را در سال ۱۹۶۲ م. ثابت کرد و می‌گفت هر گروه از مرتبهٔ فرد حل‌پذیر است، گامی مهم در رده‌بندی گروه‌های سادهٔ متناهی محسوب می‌شود (تامپسون برای این کار، مدال فیلدز دریافت کرد). یک قرن پس از کشف گروه‌های سادهٔ ماتیو، گروه سادهٔ یانکو $J_۱$ در سال ۱۹۶۶ م. کشف شد و سپس گروه‌های سادهٔ متعددی کشف گردیدند که عضوی از هیچ خانواده شناخته‌شده‌ای از گروه‌های ساده نبودند تا اینکه سرانجام در سال ۱۹۷۵ م.آخرین گروه پراکنده توسط یانکو کشف شد که با $J_۴$ نمایش داده می‌شود. اعلام قضیهٔ رده‌بندی گروه‌های سادهٔ متناهی، در سال ۱۹۷۹ م. توسط گُرنشتاین صورت گرفت.

برای راحتیِ کار خواننده در بخش بعدی، دو گروه مشخص را تعریف می‌کنیم. فرض کنید F یک میدان متناهی با p^f عضو است که p یک عدد اول است. می‌دانیم $\mathrm{Aut}(F)=\langle\sigma_p\rangle$ که σ_p خودریختی فروبنیوس با ضابطه $\sigma_p(x)=x^p$، $x\in F$، است. فرض کنیم V یک فضای برداری با بُعد n روی میدان F است. گروه تبدیلات خطی وارون‌پذیر V تشکیل گروه خطی عام $GL_n(V)$ را می‌دهد و زیرگروه آن متشکل از تبدیلات خطی با دترمینان ۱ را با $SL_n(F)$ نمایش می‌دهیم. تبدیل خطی $T:V\longrightarrow V$ را *شبه‌خطی* می‌نامیم اگر برای هر $x,y\in V$ و هر $\lambda\in F$،

$$T(x+y)=T(x)+T(y),\qquad T(\lambda x)=\sigma(\lambda)x$$

که در آن، σ یک خودریختی از میدان F است. مجموعهٔ تبدیلات شبه‌خطی وارون‌پذیر V را با $\Gamma L_n(F)$ نمایش می‌دهیم که تشکیل یک گروه می‌دهد و $GL_n(F)$ زیرگروه نرمال آن است و گروه خارج‌قسمتی آن با $\mathrm{Aut}(F)$ یکریخت است. بنابراین مرتبهٔ $\Gamma L_n(F)$ برابر است با $f|GL_n(F)|$.

۴. کاربردها

قضیهٔ رده‌بندی گروه‌های سادهٔ متناهی به عقیدهٔ ریاضیدانان، یکی از بزرگترین دستاوردهای ریاضیات در قرن بیستم است. از ویژگی‌های این قضیه این است که بیانی ساده اما اثباتی مشکل و طولانی دارد

(تقریباً ۱۵۰۰۰ صفحه از مجلات) و دارای کاربردهای ساده و وسیعی است. در زیر برخی از نتایجی که با استفاده از قضیهٔ رده‌بندی ثابت شده است، می‌آوریم.

- هر گروه ناآبلی سادهٔ متناهی، با دو عضو تولید می‌شود؛
- گروه خودریختی‌های خارجی هر گروه ساده، حل‌پذیر است. گروه خودریختی‌های G با $\mathrm{Aut}(G)$ و گروه خوریختی‌های داخلی آن با $\mathrm{Inn}(G)$ نمایش داده می‌شود و $\mathrm{Out}(G) = \frac{\mathrm{Aut}(G)}{\mathrm{Inn}(G)}$ گروه خودریختی‌های خارجی G نامیده می‌شود؛
- هیچ گروه جایگشتی ۶-انتقالی بجز گروه متناوب و گروه متقارن وجود ندارد؛
- به‌ازای هر عدد طبیعی n حداکثر دو گروه سادهٔ نایکریخت از مرتبهٔ n وجود دارد. برای مثال، می‌توان به دو گروه $A_۸$ و $PSL_۳(۴)$ اشاره کرد.
- هر عضو از یک گروه سادهٔ متناهیِ ناآبلی، یک جابه‌جاگر است؛
- هر گروه جایگشتیِ انتقالی روی یک مجموعهٔ متناهی با بیش از یک عضو، دارای عضوی از مرتبهٔ توانی از یک عدد اول است که هیچ عضوی از Ω را ثابت نگه نمی‌دارد؛
- اگر G یک گروه دوانتقالی باشد، آن‌گاه ساختار G کاملاً مشخص است؛
- اگر G یک گروه جایگشتی انتقالی از رتبهٔ ۳ باشد، آن‌گاه ساختار G کاملاً مشخص است؛
- حدسیّهٔ فروبنیوس دربارهٔ تعداد جواب‌های $x^n = ۱$ در گروه G حل می‌شود. این حدسیّه می‌گوید اگر G یک گروه متناهی و n یک مقسوم‌علیه مرتبهٔ G فرض شود، آن‌گاه اندازه مجموعهٔ $\{g \in G | g^n = ۱\}$ مضربی از n است؛
- فرض کنیم f و g چندجمله‌ای‌های غیر ثابت تجزیه‌ناپذیر در $\mathbb{C}[x]$ باشند که $f(x) - g(y)$ در $\mathbb{C}[x, y]$ تحویل‌پذیر است. آن‌وقت یا $g(x) = f(ax + b)$ که در آن، $a, b \in \mathbb{C}$ و یا $\deg\ f = \deg\ g = ۷, ۱۱, ۱۳, ۱۵, ۲۱, ۳۱$ (در اینجا $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ *تجزیه‌ناپذیر* نامیده می‌شود در صورتی که اگر $f(x) = f_۱(f_۲(x))$، $f_۱(x), f_۲(x) \in \mathbb{C}[x]$، آن‌گاه درجهٔ یکی از $f_i(x)$ها یک باشد، $i = ۱, ۲$)؛
- تنها گروه‌های جایگشتی چهارانتقالی عبارت‌اند از گروه‌های متقارن، متناوب و گروه‌های متناوب $M_{۱۱}$، $M_{۱۲}$ ، $M_{۲۳}$ و $M_{۲۴}$؛
- فرض کنیم p یک عدد اول است و $p > ۲۳$. در این صورت، $PSL_۲(p)$ یک زیرگروه ماکسیمال از گروه متناوب $\mathbb{A}_{p+۱}$ است؛
- فرض کنیم p یک عدد اول است و $۱ \leq k \leq p - ۱$. فرض کنیم $f(x) = x^p + ax^k + b$ روی $\mathbb{Q}$ تحویل‌ناپذیر است و G گروه گالوای $f(x)$ روی $\mathbb{Q}$ است. در این صورت، یکی از حالات زیر برقرار است:

(آ) G حل‌پذیر است.
(ب) G با $\mathbb{A}_p$ یا $\mathbb{S}_p$ یکریخت است.
(ج) $p=۷$ و $G=PSL_۲(۷)$.
(د) $p=۱۱$ و G با $G=PSL_۲(۱۱)$ یا گروه ماتیو $M_{۱۱}$ یکریخت است.
(هـ) $p=۱+۲^e>۵$ و $SL_۲(۲^e)\subseteq G\subseteq \Gamma L(۲^e)$؛

- فرض کنیم G یک گروه متناهی است، p یک عدد اول است و $p^۲\nmid |G|$. در این صورت، حداکثر دو ردهٔ تزویج از p-مکمل‌ها در G وجود دارد؛
- اگر G یک گروه ساده با سیلو p-زیرگروه از مرتبهٔ p باشد، آن‌گاه $p^۲\nmid |\mathrm{Aut}(G)|$.
- اگر G یک گروه جایگشتی اولیه و غیر دو انتقالی روی $۲p$ حرف باشد، آن‌گاه $p=۵$ و G با یکی از گروه‌های $\mathbb{A}_۵$ یا $\mathbb{S}_۵$ یکریخت است؛
- اگر $l(G)$ بزرگترین طول یک زنجیر از زیرگروه‌های گروه متناهی G باشد، آن‌گاه

$$l(\mathbb{S}_n)=[(۳n-۱)/۲]-b(n)$$

که در آن، $b(n)$ تعداد ۱ها در نمایش عدد n در پایهٔ ۲ است؛
- تعداد مؤلفه‌های همبندی گراف اول هر گروه متناهی، حداکثر ۶ است.

اثبات اینکه هر گروه ناآبلی سادهٔ متناهی با دو عضو تولید می‌شود، حاصل پژوهش‌های تعداد زیادی از ریاضیدانان است. روش اثبات به این صورت است که با استفاده از قضیهٔ رده‌بندی گروه‌های سادهٔ متناهی، گروه G به یکی از موارد فهرست‌شده در قضیه مرتبط می‌شود و گزاره برای آن گروه خاص، ثابت می‌شود.

حدسیّهٔ اور می‌گوید هر عضو از یک گروه سادهٔ متناهی، یک جابه‌جاگر است. این حدسیّه در سال ۲۰۱۰ م. با استفاده از قضیهٔ رده‌بندی گروه‌های سادهٔ متناهی ثابت شد. ساختار گروه‌های جایگشتی ۲-انتقالی با استفاده از قضیهٔ رده‌بندی گروه‌های سادهٔ متناهی، چنین است که سوکل[۱] هر گروه ۲-انتقالی، یا آبلی مقدماتی است یا اینکه یک گروه سادهٔ اولیه است و به این ترتیب، ارتباطی مستقیم بین رده‌بندی گروه‌های جایگشتی ۲-انتقالی و قضیهٔ رده‌بندی گروه‌های سادهٔ متناهی ایجاد می‌گردد. ثابت می‌شود که ۸ خانوادهٔ نامتناهی از گروه‌های ۲-انتقالی وجود دارد. به‌علاوه، ده گروه اصطلاحاً پراکندهٔ ۲-انتقالی نیز وجود دارد.

حدسیّهٔ شرایر می‌گوید اگر G یک گروه سادهٔ متناهی باشد، آن‌گاه $\frac{\mathrm{Aut}(G)}{\mathrm{Inn}(G)}$ گروهی حل‌پذیر است. این حدسیّه با دانستن ساختار G با استفاده از قضیهٔ رده‌بندی گروه‌های سادهٔ متناهی ثابت می‌شود. به‌ویژه ساختار گروه‌های غیرحل‌پذیر ۲-انتقالی G روی n حرف که دارای دوری به طول n هستند، این گونه معین

[۱] socle

می‌شود که G با یکی از گروه‌های زیر یکریخت است:

$$M_{۲۳}, M_{۱۱}, PSL_{۲}(۱۱)$$

یا اینکه $PSL_k(q) \leq G \leq P\Gamma L_k(q)$.

اکنون به گروه گالوای $f(x) = x^p + ax^k + p$ روی $\mathbb{Q}$ می‌پردازیم. می‌توان بررسی کرد که $f(x)$ حداکثر دارای ۳ ریشهٔ حقیقی است و گروه گالوای $f(x)$ روی $\mathbb{Q}$ که با G نمایش می‌دهیم، یک گروه جایگشتی روی p حرف است که دارای عضوی از مرتبهٔ ۲ است که حداکثر سه حرف را ثابت نگه می‌دارد. از آنجا که G روی p حرف، ۲-انتقالی است، از رده‌بندی گروه‌های ۲-انتقالی، ساختار ممکن برای G معین می‌گردد.

فرض کنیم G یک گروه متناهی است. گراف اول G که با $\Gamma(G)$ نمایش داده می‌شود، گرافی است که رئوس آن اعداد اولی هستند که مرتبهٔ G را عاد می‌کنند و دو رأس متمایز p و q به هم متصل‌اند اگر وتنها اگر G دارای عضوی از مرتبهٔ pq باشد. مفهوم گراف اول در رابطه با پژوهش‌هایی دربارهٔ مسائل کوهومولوژی مرتبط با نمایش‌های صحیح گروه‌های متناهی مطرح شد. ثابت شد که $\Gamma(G)$ همبند نیست اگر و تنها اگر ایده‌آل وابستهٔ G به‌عنوان مدول، تجزیه‌پذیر باشد. حاصل کار شماری از ریاضیدانان دربارهٔ تعداد مؤلفه‌های همبندی $\Gamma(G)$ با استفاده از قضیهٔ رده‌بندی گروه‌های سادهٔ متناهی چنین شد که $\Gamma(G)$ دارای حداکثر ۶ مؤلفهٔ همبندی است. این نتیجهٔ مهم، کاربردهای فراوانی در پژوهش‌های اخیر در نظریهٔ گروه‌ها داشته است.

سپاسگزاری: بدین‌وسیله از داوران محترمی که با کمال دقت متن اولیهٔ این دست‌نوشته را خواندند و پیشنهادات ارزنده‌ای ارائه کردند که منجر به بهبود نگارش مقاله شد، تشکر می‌کنم.

مراجع

[۱] روسو، ژان پی‌یر، *تاریخ علوم*، ترجمهٔ حسن صفاری، انتشارات امیرکبیر، تهران، ۱۳۷۸.

[۲] کورانت، ریچارد و رابینز، هربرت، *ریاضیات چیست*، ترجمهٔ حسن صفاری، انتشارات خوارزمی، تهران، ۱۳۴۹.

[3] Carter, R. W., *Simple Groups of Li Type*, John Wiley and Sons, London, 1972.

[4] Feit, W., Some consequences of the classification of finite simple groups, In: The Santa Cruz Conference on Finite Groups, **37** (1980), American Mathematical Society.

[5] Praeger, C. E., Using the finite simple groups, *Asia Pacific Mathematics Newsletter*, **1** (2011), no. 3, 7–10.

[6] Gorenstein, D., *Finite Simple Groups, An Introduction to Their Classifications*, Plenum, New York, 1982.

[7] Gorenstein, D., *The classification of the finite simple groups*, vol. **1**, Plenum, New York, 1983.

[8] Gorenstein, D., Lyons, R., Solomon, R., *The Classification of Finite Simple Groups*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. **40**, no.1–6, 1994.

[9] Kleiner, I.,The evolution of group theory: A brief survey, *Math. Magazine*., **59** (1986), no. 4, 195–215.

تاریخ ارسال: ۹۶/۱۲/۷؛ تاریخ بازنگری: ۹۷/۷/۲؛ تاریخ پذیرش: ۹۷/۷/۶

محمدرضا درفشه: دانشگاه تهران، پردیس علوم دانشگاه تهران، دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر
رایانامه: darafsheh@ut.ac.ir