فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
سال ۳۹، شمارهٔ ۶۷ (پاییز و زمستان ۱۳۹۹) صص. ۱۵۷ تا ۱۷۹

نظریهٔ نقطهٔ ثابت نگاشته‌های ناافزا: پرسش‌ها و یافته‌ها

علیرضا امینی هرندی

چکیده

در این مقالهٔ توصیفی، نخست به‌اختصار کاربردهایی از نظریهٔ نقطهٔ ثابت متری در اثبات وجود جواب برای معادلات گوناگون را بیان می‌کنیم. سپس به برخی از پرسش‌های اساسی نظریهٔ نقطهٔ ثابت نگاشت‌های ناافزا می‌پردازیم و پاره‌ای از مهم‌ترین یافته‌های به‌دست آمده در این حوزهٔ پژوهشی را طی نیم قرن گذشته بیان می‌کنیم.

۱. سرآغاز

فرض کنیم (X, d) یک فضای متری باشد. نقطهٔ $x \in X$ را یک نقطهٔ ثابت[۱] برای نگاشت $T : X \to X$ گوییم اگر $Tx = x$. جواب بسیاری از معادله‌های جبری، معادله‌های دیفرانسیلی و معادله‌های انتگرالی را می‌توان نقطهٔ ثابت یک نگاشت بر یک فضای متری مناسب دانست [۲۲، ۲۶]. از این‌رو یافتن شرایطی بر فضای متری X و یا بر نگاشت $T : X \to X$ که وجود یک نقطهٔ ثابت را برای T تضمین کند، اهمیت دارد.

سال ۱۹۲۲ را می‌توان سال پیدایش نظریهٔ نقطهٔ ثابت متری دانست. در این سال، باناخ قضیهٔ نقطهٔ ثابتی برای نگاشت‌های انقباضی در یک فضای متری ثابت کرد که ابزاری کارا در آنالیز غیرخطی است و تاکنون تعمیم‌ها و کاربردهای بسیاری از این قضیه داده شده است. سال ۱۹۶۵ نخستین نتایج در نظریهٔ نقطهٔ ثابت نگاشت‌های ناافزا به‌دست آمدند. این حوزهٔ پژوهشی از نظریهٔ نقطهٔ ثابت متری که به بررسی وجود نقاط ثابت نگاشت‌های ناافزا می‌پردازد، ارتباطی تنگاتنگ با هندسهٔ فضاهای باناخ دارد. بیش از نیم

عبارات و کلمات کلیدی. نقطهٔ ثابت؛ نگاشت ناافزا؛ ویژگی نقطهٔ ثابت؛ ساختار بهنجار؛ فضای باناخ بازتابی.

[۱] fixed point

قرن است که ریاضیدان‌های بسیاری به پژوهش در نظریهٔ نقطهٔ ثابت نگاشت‌های ناافزا پرداخته‌اند و ارتباط ویژگی نقطهٔ ثابت یک فضای باناخ را با سایر ویژگی‌های هندسی فضا بررسی کرده‌اند. پژوهش‌های زیادی در این زمینه در حال انجام است، چراکه هنوز پرسش‌های بسیاری بدون پاسخ مانده‌اند. حدود دو دهه است که در ایران نیز ریاضیدان‌هایی به پژوهش در نظریهٔ نقطهٔ ثابت نگاشت‌های انقباضی‌گون و نگاشت‌های ناافزا پرداخته‌اند. امید داریم که این مقاله، ریاضیدان‌های جوان و توانمند ایرانی را با پرسش‌های مهم حل‌نشدهٔ این حوزه از پژوهش آشنا و به انجام پژوهش‌های اصیل و ژرف کمک کند.

در بخش اول، نخست قضیهٔ انقباضی باناخ را بیان و سپس به کاربردهایی از آن در اثبات وجود جواب معادله‌های گوناگون اشاره می‌کنیم. در بخش دوم، ویژگی نقطهٔ ثابت تقریبی یک زیرمجموعه از یک فضای باناخ برای نگاشت‌های ناافزا را معرفی و توصیفی از همهٔ زیرمجموعه‌های ناتهی، بسته و محدب از یک فضای باناخ با این ویژگی را ارائه می‌کنیم. در بخش سوم، ویژگی‌های نقطهٔ ثابت و نقطهٔ ثابت ضعیف یک فضای باناخ برای نگاشت‌های ناافزا را معرفی می‌کنیم و پرسش‌های حل‌نشدهٔ مربوط به آنها را بررسی خواهیم کرد. در بخش چهارم، مفهوم ساختار بهنجار یک فضای باناخ را معرفی و قضیه نقطهٔ ثابت کِرک را بیان می‌کنیم و به برخی شرایط هندسی یک فضای باناخ که مستلزم ساختار بهنجار هستند، خواهیم پرداخت. در بخش پنجم، در فضاهای باناخی که دارای ساختار بهنجار نیستند، برخی شرایط کافی برای ویژگی نقطهٔ ثابت ضعیف فضا بازگو خواهند شد. در بخش ششم، ارتباط بین بازتابی بودنِ فضا و ویژگی نقطهٔ ثابت را بررسی می‌کنیم. در بخش هفتم، به مسئلهٔ پایداریِ ویژگی نقطهٔ ثابت فضا تحت یک نرم‌گذاری مجدد می‌پردازیم و سرانجام در بخش پایانی، به واکاویِ ویژگی نقطهٔ ثابت نگاشت‌های چندمقداری خواهیم پرداخت و پرسش‌هایی حل‌نشده را مطرح خواهیم کرد.

باناخ در سال ۱۹۲۲ قضیهٔ زیر را به‌دست آورد که اغلب آن را قضیهٔ انقباضی باناخ[۱] می‌نامند و این مهم‌ترین (پُرکاربردترین) قضیهٔ نقطهٔ ثابت در آنالیز غیرخطی است.

قضیه ۱.۱ (باناخ،۱۹۲۲). *فرض کنیم (X,d) یک فضای متری کامل و $T:X\to X$ نگاشتی باشد که*

$$d(Tx,Ty)\le kd(x,y) \qquad \forall\, x,y\in X$$

که در آن، $0\le k<1$ عدد ثابتی است. در این صورت، T دارای نقطهٔ ثابت یکتای $\overline{x}\in X$ است و برای هر $x\in X$ دنبالهٔ $\{x_n\}$ تعریف‌شده با $x_n=T^nx$، $n\in\mathbb{N}$، به $\overline{x}$ همگرا است. افزون بر این، برای هر $n\in\mathbb{N}$ داریم $d(x_n,\overline{x})\le \frac{k^n}{1-k}d(x,Tx)$.

[۱] Banach contraction principle

به بیان دیگر، هر نگاشت لیپ‌شیتسی $T : X \to X$ با ثابت لیپ‌شیتس $k < ۱$ (که آن را یک *نگاشت انقباضی* می‌نامیم)، دارای نقطهٔ ثابت یکتایی است و این نقطهٔ ثابت را می‌توان با هر دقت دلخواه تقریب زد. اینک دو نمونه از کاربردهای قضیهٔ انقباضی باناخ را بیان می‌کنیم. برای مطالعهٔ کاربردهای بیشتر، به [۲۲، ۲۳، ۲۶] مراجعه کنید.

مثال ۲.۱. فرض کنیم $f(t,x) : [\circ, T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تابعی پیوسته باشد که در آن، $T > \circ$. *مسئله مقدار اولیهٔ کُشی* عبارت است از یافتن تابع به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر $x(t) : [\circ, T] \to \mathbb{R}$ به‌طوری که در معادلهٔ دیفرانسیل

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), & t \in [\circ, T] \\ x(\circ) = \zeta \end{cases}$$

صدق کند. تابع x جوابی از این معادلهٔ دیفرانسیل است اگر و تنها اگر جوابی از معادلهٔ انتگرال زیر باشد:

$$x(t) = \zeta + \int_\circ^t f(s, x(s))ds, \qquad t \in [\circ, T]. \tag{۱.۱}$$

اگر تابع $F : C[\circ, T] \to C[\circ, T]$ را با

$$(Fx)(t) = \zeta + \int_\circ^t f(s, x(s))ds, \qquad t \in [\circ, T]$$

تعریف کنیم، آن‌گاه x جوابی از معادلهٔ انتگرال (۱.۱) است اگر و تنها اگر $Fx = x$. فرض کنیم $L > \circ$ چنان موجود باشد که

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leq L|x-y| \qquad \forall x, y \in \mathbb{R},\ t \in [\circ, T]. \tag{۲.۱}$$

نشان می‌دهیم مسئلهٔ مقدار اولیهٔ کُشی دارای جوابی یکتا است. برای هر $\lambda > \circ$ نرم $\|.\|_\lambda$ را بر فضای $C[\circ, T]$ چنین تعریف می‌کنیم:

$$\|x\|_\lambda = \max\{e^{-\lambda L t}|x(t)| : t \in [\circ, T]\}$$

با استفاده از (۲.۱)، به‌سادگی می‌توان دید که

$$\|Fx - Fy\|_\lambda \leq \frac{۱}{\lambda}\|x - y\|_\lambda \qquad \forall\, x, y \in C[\circ, T].$$

پس برای $\lambda > ۱$ نگاشت $T : (C[\circ, T], \|.\|_\lambda) \to (C[\circ, T], \|.\|_\lambda)$ انقباضی است. در نتیجه بنابر قضیهٔ انقباضی باناخ، T دارای یک نقطهٔ ثابت یکتا است که همان جواب یکتای مسئلهٔ مقدار اولیهٔ کُشی است.

مثال ۳.۱ (ریشه‌های دوم در جبرهای باناخ). فرض کنیم $(X,\|.\|)$ یک جبر باناخ حقیقی باشد. برای هر $z \in X$، $X(z)$ را زیرجبر تولید شده توسط z بگیرید. می‌دانیم که جبر $X(z)$ همیشه تعویض‌پذیر است. نشان می‌دهیم برای هر $z \in X$ که $\|z\| < ۱$، نقطهٔ یکتای $x \in X$ وجود دارد به‌طوری که $\|x\| < ۱$ و

$$x^۲ - ۲x + z = ۰. \tag{۳.۱}$$

برای اثبات، فرض کنیم $\|z\| < d < ۱$ و نگاشت T را چنین تعریف می‌کنیم:

$$Tx = \frac{۱}{۲}(x^۲ + z), \qquad x \in B(۰, d) \subseteq X(z)$$

که در آن، $B(۰, d)$ گوی بسته به مرکز ۰ و شعاع d است. چون

$$\|Tx\| \leq \frac{۱}{۲}(\|x\|^۲ + \|z\|) \leq \frac{۱}{۲}(d^۲ + d) < d,$$

داریم $T : B(۰, d) \to B(۰, d)$. برای هر $x, y \in B(۰, d)$،

$$\begin{aligned}\|Tx - Ty\| &= \frac{۱}{۲}\|x^۲ - y^۲\| = \frac{۱}{۲}\|(x+y)(x-y)\| \\ &\leq \frac{۱}{۲}(\|x\| + \|y\|)(\|x-y\|) \leq d\|x-y\|.\end{aligned}$$

پس T یک نگاشت انقباضی بر مجموعهٔ بستهٔ $B(۰, d)$ است و بنابر قضیهٔ انقباضی باناخ، T دارای نقطهٔ ثابت یکتای x است که همان ریشهٔ معادلهٔ (۳.۱) است. حالا فرض کنیم X دارای بردار واحد e باشد. معادلهٔ (۳.۱) را می‌توان به‌صورت هم‌ارزِ

$$(e - x)^۲ = e - z$$

نوشت. پس آنچه که نشان دادیم، هم‌ارز است با اینکه هر عضو X به‌شکل $e - z \in X$ که $\|z\| < ۱$، دارای ریشهٔ دوم یکتای $y = e - x$ است با $\|x\| < ۱$.

فرض کنیم (X, d) یک فضای متری کامل و $T : X \to X$ یک نگاشت لیپ‌شیتسی با ثابت لیپ‌شیتس $k = ۱$ باشد. پرسشی که با توجه به قضیهٔ انقباضی باناخ به‌طور طبیعی مطرح می‌شود، این است که آیا T دارای نقطهٔ ثابت است؟ تابع

$$T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad Tx = x + ۱ \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

نشان می‌دهد که یک نگاشت لیپ‌شیتسی با ثابت $k = 1$ بر یک فضای متری کامل و یا حتی بر یک فضای باناخ، ممکن است نقطهٔ ثابت نداشته باشد. هر نگاشت لیپ‌شیتسی $T : X \to X$ با ثابت لیپ‌شیتس $k \leq 1$ را یک *نگاشت ناافزا*[۱] می‌خوانیم، زیرا در چنین نگاشتی، فاصلهٔ بین تصاویر هر دو نقطه، از فاصلهٔ بین آن دو نقطه بزرگتر نیست.

مسئله ۴.۱. همهٔ فضاهای متری کامل (X, d) را توصیف کنید با این ویژگی که هر نگاشت ناافزا مانند $T : X \to X$ دارای نقطهٔ ثابت باشد.

۲. ویژگی نقطهٔ ثابت تقریبی

فرض کنیم C یک زیرمجموعهٔ از فضای باناخ X و $T : C \to X$ یک نگاشت دلخواه باشد. دنبالهٔ $\{x_n\}$ در C را یک *دنبالهٔ نقطهٔ ثابت تقریبی* برای نگاشت T گوییم اگر $\lim_{n\to\infty} \|x_n - Tx_n\| = 0$. کاربردی ساده از قضیهٔ نقطهٔ ثابت باناخ، نشان می‌دهد که:

قضیه ۱.۲ ([۲۲]). *اگر K یک زیرمجموعهٔ ناتهی، بسته، محدب و کراندار از فضای باناخ X باشد و $T : K \to K$ یک نگاشت ناافزا باشد، آن‌گاه T دارای یک دنبالهٔ نقطهٔ ثابت تقریبی است.*

گوییم یک زیرمجموعهٔ ناتهی C از فضای باناخ X دارای *ویژگی نقطهٔ ثابت تقریبی*[۲] (به‌اختصار، AFPP) برای نگاشت‌های ناافزا است اگر برای هر نگاشت ناافزای $T : C \to C$ داشته باشیم $\inf_{x\in C} \|x - Tx\| = 0$. به بیان دیگر، هر نگاشت ناافزای T در C دارای یک دنبالهٔ نقطهٔ ثابت تقریبی باشد.

مسئله ۲.۲. همهٔ زیرمجموعه‌های بسته و محدب از فضای باناخ X را توصیف کنید که دارای AFPP باشند.

این مسئله به‌طور کامل حل شده است. در سال ۱۹۸۳ ریخ[۳] [۴۲] ثابت کرد که

قضیه ۳.۲. *یک زیرمجموعهٔ بسته و محدب C از یک فضای باناخ بازتابی X دارای AFPP است اگر و تنها اگر C به‌طور خطی کراندار*[۴] *باشد، یعنی برای هر خط r در X، $C \cap r$ کراندار باشد.*

شفریر[۵] در سال ۱۹۹۰ [۴۴] مفهوم سویی-کراندار بودن[۶] یک زیرمجموعه از یک فضای باناخ X (که در یک فضای باناخ بازتابی هم‌ارز به‌طورخطی کراندار بودن مجموعه است) را معرفی کرد و نشان داد که یک زیرمجموعهٔ محدب C از یک فضای باناخ X سویی-کراندار است اگر و تنها اگر برای هر دنبالهٔ

[۱] nonexpansive map [۲] approximate fixed point property [۳] Reich [۴] linearly bounded [۵] Shafrir
[۶] directionally bounded

$\{x_n\}$ در C که $\|x_n\| \to \infty$ و هر $f \in S_{X^*}$ داشته باشیم $\limsup_{n\to\infty} f\left(\frac{x_n}{\|x_n\|}\right) < \infty$ که در آن، S_{X^*} کرهٔ واحد فضای X^* را نشان می‌دهد. او قضیهٔ ریخ را به یک فضای باناخ دلخواه گسترش داد:

قضیه ۴.۲. *یک زیرمجموعهٔ بستهٔ و محدب C از فضای باناخ X دارای AFPP است اگر و تنها اگر C سویی-کراندار باشد.*

۳. ویژگی‌های نقطهٔ ثابت و نقطهٔ ثابت ضعیف یک فضای باناخ

فرض کنیم $(X, \|\cdot\|)$ یک فضای باناخ باشد. گوییم X دارای *ویژگی نقطهٔ ثابت* (به‌اختصار، FPP) است اگر برای هر زیرمجموعهٔ ناتهی، بسته، محدب و کراندار K از X، هر نگاشت ناافزای $T : K \to K$ دارای نقطهٔ ثابت باشد. گوییم X دارای *ویژگی نقطهٔ ثابت ضعیف*[1] (به‌اختصار، WFPP) است اگر برای هر زیرمجموعهٔ ناتهی، فشردهٔ ضعیف و محدب K از X، هر نگاشت ناافزای $T : K \to K$ دارای نقطهٔ ثابت باشد. بدیهی است که یک فضا با FPP دارای WFPP نیز هست و در یک فضای باناخ بازتابی این دو ویژگی یکی هستند.

اکنون پرسشی که مطرح می‌شود این است که آیا هر فضای باناخ، دارای FPP است؟ مثال زیر نشان می‌دهد که پاسخ منفی است.

مثال ۱.۳. فضای باناخ $(c_\circ, \|\cdot\|_\infty)$ دارای FPP نیست، زیرا نگاشت ناافزای $T : B_{c_\circ} \to B_{c_\circ}$ تعریف‌شده با $T(x_۱, x_۲, x_۳, \ldots) = (۱, x_۱, x_۲, x_۳, \ldots)$ دارای نقطهٔ ثابت نیست که در آن، $B_{c_\circ}$ نشان‌دهندهٔ گوی واحد بستهٔ $c_\circ$ است.

هرچند فضای باناخ $(c_\circ, \|\cdot\|_\infty)$ دارای FPP نیست، در سال ۱۹۸۱ موری[2] [۳۸] ثابت کرد که

قضیه ۲.۳. *فضای باناخ $(c_\circ, \|\cdot\|_\infty)$ دارای WFPP است.*

بنابراین در حالت کلی، FPP و WFPP دو ویژگی متفاوت از یک فضای باناخ هستند.

دانستیم که فضاهای باناخی وجود دارند که دارای FPP نیستند و لذا پرسشی که از همان سال ۱۹۶۵ مطرح شد، این بود که آیا هر فضای باناخ دارای WFFP است؟ پاسخ چندان ساده نبود و سال‌ها زمان برد تا مثال نقضی یافت شد. در سال ۱۹۸۱ آلسپاک[3] [۲] مثال زیر را عرضه کرد:

مثال ۳.۳. فضای باناخ $L_۱[\circ, ۱]$ دارای WFPP نیست. در واقع، برای زیرمجموعهٔ فشردهٔ ضعیف و محدب

$$K = \left\{ f \in L_۱[\circ, ۱] :\ \circ \le f \le ۲,\ \int_\circ^۱ f = ۱ \right\}$$

[1] weak fixed point property [2] Maurey [3] Alspach

از $L_۱[۰,۱]$، نگاشت ناافزای $T:K\to K$ با تعریفِ

$$(Tf)(x)=\begin{cases}\min\{۲f(۲x),۲\} & ۰\leq x\leq \frac{۱}{۲}\\ \max\{۲f(۲x-۱)-۲,۰\} & \frac{۱}{۲}<x\leq ۱\end{cases}$$

نقطهٔ ثابت ندارد.

نخستین پرسش‌های اساسی در نظریهٔ نقطهٔ ثابت متری نگاشت‌های ناافزا از این قرارند:

مسئله ۴.۳. (۱) همهٔ فضاهای باناخی را تعیین کنید که دارای FPP هستند. (۲) همهٔ فضاهای باناخی را تعیین کنید که دارای WFPP هستند.

هنوز به این پرسش‌ها پاسخ کامل داده نشده است و به نظر می‌رسد که تا حل کامل آنها راه درازی مانده است، ولی شرایطی بر فضای باناخ X یافت شده‌اند که برای برقراریِ FPP و یا WFPP کافی هستند که در بخش بعد، به مواردی از این دست اشاره می‌کنیم.

۴. ساختار بهنجار در یک فضای باناخ

می‌دانیم که یک فضای باناخ $(X,\|\cdot\|)$ فضای هیلبرت است اگر و تنها اگر قانون متوازی‌الاضلاع در X برقرار باشد، یعنی برای هر $x,y\in X$،

$$\|x+y\|^۲+\|x-y\|^۲=۲(\|x\|^۲+\|y\|^۲).$$

گوییم فضای باناخ $(X,\|\cdot\|)$ *به‌طور یکنواخت محدب* است اگر برای هر $\epsilon\in(۰,۲]$ عدد $\delta>۰$ وجود داشته باشد به‌طوری که

$$\Big(\|x\|\leq ۱,\ \|y\|\leq ۱,\ \|x-y\|\geq\varepsilon\Big)\Rightarrow\left\|\frac{x+y}{۲}\right\|\leq ۱-\delta.$$

بنابر قانون متوازی‌الاضلاع، هر فضای هیلبرت به‌طور یکنواخت محدب است. ردهٔ فضاهای به‌طور یکنواخت محدب بسیار گسترده‌تر از ردهٔ فضاهای هیلبرت است. برای مثال، هر فضای L_p که در آن، $۱<p<\infty$، یک فضای به‌طور یکنواخت محدب است [۷].

در سال ۱۹۶۵ نخستین نتایج در نظریهٔ نقطهٔ ثابت نگاشت‌های ناافزا به‌دست آمدند. در این سال، براودر[1] [۵] نشان داد که

قضیه ۱.۴ (براودر، ۱۹۶۵). *هر فضای هیلبرت دارای FPP است.*

[1] Browder

سپس در همان سال نتیجه خود را گسترش داد و ثابت کرد که [۶]:

قضیه ۲.۴ (براودر، ۱۹۶۵). *هر فضای باناخ به‌طور یکنواخت محدب دارای FPP است.*

در سال ۱۹۴۸ بروتسکی و میلمن[۱] [۴] مفهوم *ساختار بهنجار*[۲] را در یک فضای باناخ معرفی کردند و نشان دادند که هر زیرمجموعهٔ ناتهی، فشردهٔ ضعیف و محدب K از فضای باناخ X که دارای ساختار بهنجار باشد، شامل نقطه‌ای مانند $\overline{x}$ است به‌طوری که تحت هر نگاشت طولپا [۳] و پوشای $T : K \to K$ ثابت می‌ماند [۴]. گوییم زیرمجموعهٔ ناتهی و محدب K از X دارای ساختار بهنجار است اگر هر زیرمجموعهٔ ناتهی، محدب و کراندار D از K با شرط $\operatorname{diam} D > ۰$، شامل نقطه‌ای ناقطری باشد، یعنی $u \in D$ موجود باشد که

$$\sup\{\|u - v\| : v \in D\} < \operatorname{diam} D.$$

گوییم فضای باناخ X دارای *ساختار بهنجار* است اگر هر زیرمجموعهٔ ناتهی و محدب X دارای ویژگی بهنجار باشد. فضای باناخ X را دارای *ساختار بهنجار ضعیف*[۴] گوییم اگر هر زیرمجموعهٔ ناتهی، فشردهٔ ضعیف و محدب X دارای ویژگی بهنجار باشد.

یک دنباله مانند $\{x_n\}$ در فضای باناخ X را *قطری* گوییم اگر دنبالهٔ $\{x_n\}$ مآلاً ثابت نباشد و

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{dist}\,(x_{n+۱}, \operatorname{co}\,\{x_۱, \ldots, x_n\}) = \operatorname{diam}\,\{x_۱, x_۲, \ldots\}.$$

به‌سادگی دیده می‌شود که هر زیردنباله از یک دنبالهٔ قطری، خود یک دنبالهٔ قطری است. توصیف ساده‌ای از مفهوم ساختار بهنجار برحسب دنباله‌های قطری وجود دارد:

قضیه ۳.۴ (بروتسکی و میلمن، ۱۹۴۸). *زیرمجموعهٔ ناتهی، کراندار و محدب K از فضای باناخ X دارای ساختار بهنجار است اگر و تنها اگر K شامل دنباله‌ای قطری نباشد.*

با استفاده از این قضیه به‌سادگی می‌توان نشان داد که

قضیه ۴.۴. *هر زیرمجموعهٔ فشردهٔ و محدب از یک فضای باناخ، دارای ساختار بهنجار است.*

همچنین در [۲۲] ثابت شده است که

قضیه ۵.۴. *هر فضای به‌طور یکنواخت محدب و در نتیجه هر فضای هیلبرت، دارای ساختار بهنجار است.*

[۱] Brodskii and Milman [۲] normal structure [۳] isometry [۴] weak normal structure

مثال ۶.۴. در فضای $(c_\circ, \|\cdot\|_\infty)$ مجموعهٔ

$$K = \{(x_n) \in c_\circ : \circ \leq x_n \leq ۱ \quad \forall n \in \mathbb{N}\}$$

محدب و کراندار است و به‌ازای هر $x \in K$،

$$\lim_{n\to\infty} \|x - e_n\|_\infty = ۱ = \mathrm{diam}\,(K)$$

که در آن، e_n برداری در $c_\circ$ است که مؤلفهٔ nاُم آن ۱ و بقیهٔ مؤلفه‌ها صفر هستند. پس K دارای نقطهٔ ناقطری نیست و بنابراین فضای $(c_\circ, \|\cdot\|_\infty)$ دارای ساختار بهنجار نیست.

مثال ۷.۴. به‌سادگی می‌توان دید که فضای $(\ell_۱, \|\cdot\|_۱)$ نیز دارای ساختار بهنجار نیست، ولی چون فضای $\ell_۱$ دارای *ویژگی شور*[۱] است، یعنی هر دنبالهٔ همگرای ضعیف، همگرا است، پس فشردگی و فشردگی ضعیف مجموعه‌ها در $l_۱$ یکسان است و بنابراین $\ell_۱$ دارای ساختار بهنجار ضعیف است.

کِرک[۲] در سال ۱۹۶۵ قضیهٔ براودر را تعمیم داد [۲۸]. این قضیه اهمیت مفهوم ساختار بهنجار در نظریهٔ نقطهٔ ثابت را آشکار می‌سازد.

قضیه ۸.۴. *فرض کنیم X یک فضای باناخ با ساختار بهنجار باشد، آن‌گاه X دارای WFPP است.*

با توجه به قضیهٔ کِرک، پرسش زیر به‌طور طبیعی مطرح می‌شود:

مسئله ۹.۴. فرض کنیم X یک فضای باناخ با ساختار بهنجار باشد. آیا X دارای FPP هست؟

مثال زیر نشان می‌دهد که در حالت کلی، پاسخ این پرسش منفی است:

مثال ۱۰.۴. فرض کنیم $\{t_n\}$ یک دنبالهٔ چگال در $[\circ, ۱]$ باشد، $\mu > \circ$ و

$$\|x\|_\mu = \sqrt{(\max_{t\in[\circ,۱]} x(t))^۲ + \mu \sum_{i=۱}^{\infty} (\frac{x(t_i)}{۲^i})^۲}, \qquad x \in C[\circ, ۱].$$

در این صورت، فضای باناخ $(C[\circ, ۱], \|\cdot\|_\mu)$ ساختار بهنجار دارد، ولی دارای FPP نیست [۲۲].

مثال زیر نشان می‌دهد که در فضاهای باناخ، هیچ‌یک از دو ویژگیِ بازتابی و ساختار بهنجار، دیگری را ایجاب نمی‌کند.

---

[۱] Schur property [۲] Kirk

مثال ۱۱.۴. $(C[\circ,1], \|\cdot\|_\mu)$ یک فضای باناخ دارای ساختار بهنجار است که بازتابی نیست (توجه کنید که این فضا با فضای نابازتابی $(C[\circ,1], \|\cdot\|_\infty)$ یکریخت است).
فرض کنیم $E_{\sqrt{2}}$ فضای حقیقی l_2 با نرم $|x|_{\sqrt{2}} = \max\{\|x\|_2, \sqrt{2}\|x\|_\infty\}$ باشد. فضای باناخ $E_{\sqrt{2}}$ بازتابی است که ساختار بهنجار ندارد، ولی دارای FPP است [۲۹]. پس حتی در فضاهای باناخ بازتابی، ساختار بهنجار، یک شرط لازم برای FPP نیست.

گوییم زیرمجموعهٔ ناتهی، محدب و کراندار K از X دارای *ساختار بهنجار یکنواخت*[1] است اگر $k \in (\circ,1)$ وجود داشته باشد به‌طوری که برای هر زیرمجموعهٔ ناتهی، محدب و بسته D از K داشته باشیم $r(D) \leq k \operatorname{diam} K$ که در آن،

$$r(D) = \inf_{u\in D} \sup_{v\in D} \|u-v\|.$$

می‌گوییم فضای باناخ X دارای ساختار بهنجار یکنواخت است اگر هر زیرمجموعهٔ ناتهی، محدب و کراندار آن دارای این ویژگی باشد. بدیهی است که هر فضا که ساختار بهنجار یکنواخت داشته باشد، دارای ساختار بهنجار نیز هست. همچنین از [۲۲] می‌دانیم که

قضیه ۱۲.۴. *هر فضای به‌طور یکنواخت محدب، دارای ساختار بهنجار یکنواخت است.*

دیدیم که ساختار بهنجار فضا مستلزم بازتابی بودن فضا نیست اما مالوتا[2] [۳۵] نشان داد که

قضیه ۱۳.۴ (مالوتا، ۱۹۸۹). *اگر فضای باناخ X دارای ساختار بهنجار یکنواخت باشد، آن‌گاه X بازتابی است.*

پس فضای نابازتابی $(C[\circ,1], \|\cdot\|_\mu)$ مثالی است از یک فضای باناخ که دارای ساختار بهنجار است ولی ساختار بهنجار یکنواخت ندارد. این موضوع، پرسش‌های اساسی دیگری را در نظریهٔ نقطهٔ ثابت متری پیش می‌آورد:

مسئله ۱۴.۴. (۱) همهٔ فضاهای باناخی را تعیین کنید که دارای ساختار بهنجار هستند. (۲) همهٔ فضاهای باناخی را تعیین کنید که دارای ساختار بهنجار ضعیف هستند.

تاکنون شرایط کافی بسیاری بر یک فضای باناخ یافت شده‌اند که هر یک، ساختار بهنجار (ضعیف) فضا و یا ساختار بهنجار یکنواخت آن فضا را ایجاب می‌کنند؛ از جمله، لائو و همکاران در سال ۱۹۹۷ نشان دادند که [۳۰]:

---
[1] uniform normal structure [2] Maluta

قضیه ۱۵.۴ (لائو و همکاران، ۱۹۹۷). *یک C^*- جبر X دارای ساختار بهنجار ضعیف است اگر و تنها اگر X بُعد متناهی باشد.*

فرض کنیم $\rho_X : [۰,\infty) \to [۰,\infty)$ پیمانهٔ هموار[۱] X فضای باناخ باشد که چنین تعریف می‌شود:

$$\rho_X(t) = \sup\left\{\frac{\|x+ty\|+\|x-ty\|}{۲} - ۱ : x, y \in B_X\right\}.$$

از [۴۶] می‌دانیم که

قضیه ۱۶.۴. *اگر در یک فضای باناخ X داشته باشیم $\rho'_X(۰) < \frac{۱}{۲}$، آن‌گاه X دارای ساختار بهنجار است که در آن،*

$$\rho'_X(۰) = \lim_{t\to ۰^+} \frac{\rho_X(t)}{t}.$$

حتی می‌توان نتیجه بهتری گرفت [۴۰]:

قضیه ۱۷.۴. *فرضِ $\rho'_X(۰) < \frac{۱}{۲}$ ایجاب می‌کند که X دارای ساختار بهنجار یکنواخت باشد.*

همچنین شرایطی کافی برای ساختار بهنجار برحسب ثابت فون‌نویمان–ژُردان

$$C_{NJ}(X) = \sup\left\{\frac{\|x+y\|^۲+\|x-y\|^۲}{۲(\|x\|^۲+\|y\|^۲)} : x, y \in X, \text{هر دو صفر نیستند } x \text{ و } y\right\}$$

به‌دست آمده است [۹، ۴۳]. می‌دانیم که برای هر فضای باناخ X داریم $۱ \le C_{NJ}(X) \le ۲$ و $C_{NJ}(X) = ۱$ اگر و تنها اگر X یک فضای هیلبرت باشد.

قضیه ۱۸.۴. *اگر در فضای باناخ X داشته باشیم $C_{NJ}(X) < \frac{۱+\sqrt{۳}}{۲}$، آن‌گاه X دارای ساختار بهنجار یکنواخت است.*

همچنین در [۹] ثابت شده است که

قضیه ۱۹.۴. *اگر در فضای باناخ X داشته باشیم $C_{NJ}(X) < ۱ + \frac{۱}{J(X)^۲}$، آن‌گاه X دارای ساختار بهنجار یکنواخت است که در آن،*

$$J(X) = \sup\{\min\{\|x+y\|, \|x-y\|\} : x, y \in B_X\}.$$

ثابت جیمز[۲] فضا است (می‌دانیم برای هر فضای باناخ X، $\sqrt{۲} \le J(X) \le ۲$ و اگر X یک فضای هیلبرت باشد، آن‌گاه $J(X) = \sqrt{۲}$).

[۱] modulus of smoothness [۲] James constant

در سال ۲۰۰۳ دومپونگسا و همکاران [۱۰] ثابت کردند که

قضیه ۲۰.۴. *اگر $J(X) < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$، آن‌گاه فضای باناخ X دارای ساختار بهنجار یکنواخت است.*

در سال ۲۰۰۸، خمینز ملادو[1] و همکاران [۲۴] ثابت هندسی دانکل-ویلیامز[2] فضای باناخ X را این‌گونه تعریف کردند:

$$DW(X) = \sup\left\{\frac{\|x\|+\|y\|}{\|x-y\|}\left\|\frac{x}{\|x\|}-\frac{y}{\|y\|}\right\| :\ x \neq y, x \neq 0 \neq y\right\}.$$

آنها همچنین قضیهٔ زیر را ثابت کردند. توجه کنید که برای هر فضای باناخ X، $2 \leq DW(X) \leq 4$ و $DW(X) = 2$ اگر و تنها اگر X یک فضای هیلبرت باشد.

قضیه ۲۱.۴. *اگر X یک فضای باناخ باشد که*

$$DW(X) < (3+2\sqrt{2})^{\frac{1}{3}} + (3-2\sqrt{2})^{\frac{1}{3}},$$

آن‌گاه X دارای ساختار بهنجار است.

هنوز نمی‌دانیم که آیا در قضیهٔ بالا می‌توان ثابت $(3+2\sqrt{2})^{\frac{1}{3}} + (3-2\sqrt{2})^{\frac{1}{3}}$ را بهتر کرد یا نه؟ فرض کنیم X یک فضای باناخ باشد. برای هر عدد نامنفی a تعریف می‌کنیم

$$R(a, X) = \sup\{\liminf_{n\to\infty} \|x_n + x\|\}$$

که در آن، سوپرمم روی همهٔ $x \in X$ با $\|x\| \leq a$ و همهٔ دنباله‌های ضعیف-پوچ $\{x_n\}$ در گوی واحد بستهٔ X با شرط $\lim_{n,m,n\neq m} \|x_n - x_m\| \leq 1$ گرفته شده است. حال ثابت هندسی $M(X)$ را چنین تعریف می‌کنیم [۱۱]:

$$M(X) = \sup\left\{\frac{1+a}{R(a,X)} : a \geq 0\right\}.$$

در سال ۲۰۰۸ ماسکونیان ناباڑ [۳۷] ثابت کرد که

قضیه ۲۲.۴. *اگر در فضای باناخ X داشته باشیم $\rho'_X(0) < \frac{M(X)}{2}$، آن‌گاه X دارای ساختار بهنجار است.*

[1] Jiménez-Melado [2] Dunkl-Williams constant

۵. WFPP در فضاهایی که ساختار بهنجار ندارند

بنابر قضیهٔ کِرک، ساختار بهنجار فضا یک شرط کافی (و نه لازم) برای WFPP است. در فضاهایی که دارای ساختار بهنجار نیستند، شرط‌های کافی مناسبی یافت شده‌اند که مستلزم WFPP هستند. این گزاره را لین [۳۲] در سال ۱۹۸۵ ثابت کرد:

قضیه ۱.۵. *فرض کنیم X یک فضای باناخ با یک پایه شاودر ۱-نامشروط باشد. در این صورت، X دارای WFPP است.*

می‌دانیم که فضای c_0، فضاهای l_p، $1 \leq p < \infty$، فضاهای D_1 و D_∞ جیمز همگی دارای پایهٔ شاودر ۱-نامشروط هستند [۲۲]. پس فضاهایی که دارای پایهٔ شاودر ۱-نامشروط هستند، ممکن است نه بازتابی باشند و نه ساختار بهنجار داشته باشند. در پیوند با قضیهٔ لین، این پرسش هنوز بدون پاسخ مانده است:

مسئله ۲.۵. فرض کنیم X یک فضای باناخ با یک پایه شاودر نامشروط باشد. آیا X دارای WFPP است؟

سیمز در سال ۱۹۸۸ [۴۵] ویژگی تعامد ضعیف (WORTH)[1] یک فضای باناخ را معرفی کرد. گوییم فضای باناخ X دارای ویژگی WORTH است اگر برای هر دنبالهٔ $\{x_n\}$ که همگرای ضعیف به 0 است و هر x داشته باشیم

$$\limsup_{n\to\infty} \|x_n + x\| = \limsup_{n\to\infty} \|x_n - x\|.$$

برای $x^*, y^* \in S_{X^*}$ و $\delta \in [0, 1]$ قرار می‌دهیم

$$S(x^*, \delta) = \{x \in B_X : x^*(x) \geq 1 - \delta\}$$

و

$$S(x^*, y^*, \delta) = S(x^*, \delta) \cap S(y^*, \delta).$$

اگر $r \in (0, 2]$، فضای باناخ X را $r - UNC$ گوییم در صورتی که $\epsilon \in (0, r)$ و $\delta > 0$ وجود داشته باشند به‌طوری که اگر $x^*, y^* \in S_{X^*}$ و $\|x^* - y^*\| \geq \epsilon$، آن‌گاه $\operatorname{diam} S(x^*, y^*, \delta) \leq \epsilon$. در سال ۲۰۰۳ ثابت شد که [۲۰]:

قضیه ۳.۵. *هر فضای باناخ $UNC - 2$ با ویژگی WORTH دارای WFPP است.*

[1] weak orthogonality

ولی هنوز پاسخ سؤال زیر را نمی‌دانیم:

مسئله ۴.۵. آیا هر فضای باناخ X با ویژگی WORTH دارای WFPP است؟

در سال ۱۹۹۷ گارسیا فالست [۱۹] ثابت هندسی $R(X)$ را برای فضای باناخ X تعریف کرد:

$$R(X) = \sup \left\{ \liminf_{n\to\infty} \|x_n + x\| : \|x_n\| \leq ۱,\ \|x\| \leq ۱, x_n \rightharpoonup ۰ \right\}.$$

او نشان داد که

قضیه ۵.۵. *اگر X یک فضای باناخ باشد که $R(X) < ۲$، آن‌گاه X دارای WFPP است.*

دومینگس بناویدس در سال ۱۹۹۶ نشان داد که [۱۱]:

قضیه ۶.۵. *فرض کنیم X یک فضای باناخ باشد. اگر $M(X) > ۱$، آن‌گاه X دارای WFPP است. همچنین اگر Y یک فضای باناخ یکریخت با X باشد و $d(X,Y) < M(X)$، آن‌گاه Y نیز دارای WFPP است.*

مثال ۷.۵. فضای بینوم[۱] $l^{p,\infty}$ که $p \in (۱,\infty)$ دارای ساختار بهنجار نیست (مثال ۶.۲ در [۲۲] را ببینید) ولی $M(l^{p,\infty}) = ۲^{۱-\frac{۱}{p}}$. پس بنابر قضیهٔ دومینگس بناویدس، فضای بینوم $l^{p,\infty}$ که $p \in (۱,\infty)$، دارای WFPP است. همچنین اگر $X = c_۰$، آن‌گاه $R(a, c_۰) = ۱ + a$ اگر $a < ۱$، و $R(a, c_۰) = a$ اگر $a \geq ۱$. پس $M(c_۰) = ۲$ و بنابراین $c_۰$ دارای WFPP است؛ هرچند $c_۰$ دارای ساختار بهنجار ضعیف نیست (صفحهٔ ۱۳۶ از [۳] را ببینید).

یک فضای *تقریباً به‌طور یکنواخت هموار*[۲] (به‌اختصار، NUS) ممکن است دارای ساختار بهنجار ضعیف نباشد؛ هرچند در [۳] ثابت شده است که

قضیه ۸.۵. *هر فضای تقریباً به‌طور یکنواخت هموار، دارای WFPP است.*

۶. FPP و بازتابی بودنِ فضا

هرچند فضای $L_۱[۰,۱]$ دارای FPP نیست، موری [۳۵] نشان داد که هر زیرفضای بازتابی $L_۱[۰,۱]$ دارای FPP است. در سال ۱۹۹۷ داولینگ و لنارد [۱۶] [۳] عکس نتیجهٔ موری را نیز ثابت کردند. پس

قضیه ۱.۶ (موری، ۱۹۸۲ و داولینگ و لنارد، ۱۹۹۷). *یک زیرفضای $L_۱[۰,۱]$ دارای FPP است اگر و تنها اگر بازتابی باشد.*

---

[۱] Bynum space [۲] nearly uniformly smooth [۳] Dowling and Lennard

در سال ۱۹۹۹ داولینگ و راندریانانتوانینا[1] [۱۸] نشان دادند که

قضیه ۲.۶. *یک زیرفضای $K(H)$، فضای عملگرهای فشرده بر فضای هیلبرت H، دارای FPP است اگر و تنها اگر بازتابی باشد.*

این دو قضیه این پرسش را برانگیخت که آیا پیوندی میان بازتابی بودنِ فضا و FPP وجود دارد؟ همچنین حدس زیر را تقویت کرد:

حدس ۳.۶. *فضای باناخ X بازتابی است اگر و تنها اگر X دارای FPP باشد.*

سال‌ها تلاش ریاضیدان‌ها برای اثبات و یا رد این حدس، ناکام ماند تا اینکه در سال ۲۰۰۸ لین نشان داد که بازتابی بودن، شرط لازم برای FPP نیست [۳۳].

قضیه ۴.۶ (لین، ۲۰۰۸). *فضای $(l_۱, \|\cdot\|)$ که*

$$\|(x_n)\| = \sup_{k\in\mathbb{N}} \frac{۸^k}{۱+۸^k} \sum_{n=k}^{\infty} |x_n|$$

دارای FPP است، هر چند که این فضا بازتابی نیست زیرا با $l_۱$ یکریخت است .

اما هنوز نمی‌دانیم که

مسئله ۵.۶. آیا هر فضای باناخ بازتابی X دارای FPP است؟

طبیعی است که این پرسش کلی‌تر نیز بی‌پاسخ مانده باشد:

مسئله ۶.۶. آیا هر فضای باناخ با *ویژگی رادُن-نیکودیم*[2] دارای WFPP است؟

به نظر می‌رسد که برای پاسخ به این سؤال که آیا هر فضای بازتابی دارای FPP هست یا نه، راه زیادی مانده است، زیرا حالت‌های خاص و مهمی از این پرسش نیز بدون پاسخ مانده است. شاید روش‌های نو را باید جستجو کرد و ابزارهای تازه‌ای یافت. برای نمونه، هنوز پاسخ مسئلهٔ زیر را نمی‌دانیم. به یاد بیاورید که یک فضای باناخ X اَبَربازتابی است اگر و تنها اگر بتوان X را چنان نرم‌گذاری مجدد کرد که فضای حاصل به‌طور یکنواخت محدب باشد.

مسئله ۷.۶. آیا هر فضای باناخ اَبَربازتابی دارای FPP است؟

حتی نمی‌دانیم که

[1] Dowling and Randrianantoanina [2] Radon-Nikodym property

مسئله ۸.۶. آیا هر فضای باناخ که با یک فضای هیلبرت یکریخت است، دارای FPP است؟

البته پیشرفت‌هایی نیز حاصل شده است. در سال ۲۰۰۶ در [۲۱] قضیهٔ زیر ثابت شده است. به‌یاد آورید که یک *فضای باناخ به‌طور یکنواخت نامربع*[۱] بازتابی است:

قضیه ۹.۶. *هر فضای به‌طور یکنواخت نامربع دارای FPP است.*

همچنین FPP برای برخی نرم‌های مجدد در یک فضای هیلبرت ثابت شده است. در سال ۲۰۰۶ ماسکونیان نابارُ نشان داد که [۳۶]:

قضیه ۱۰.۶. *فرض کنیم فضای باناخ $(l_2, |\cdot|)$ با فضای هیلبرت $(l_2, \|\cdot\|_2)$ یکریخت باشد و β عدد ثابتی باشد که $\|x\|_2 \leq |x| \leq \beta\|x\|_2$ برای هر $x \in l_2$. اگر $\beta < \sqrt{\frac{5+\sqrt{17}}{2}}$، آن‌گاه $(l_2, |\cdot|)$ دارای FPP است.*

۷. پایداری FPP

قضیهٔ لین به این پرسش که

مسئله ۱.۷. آیا هر یک از فضاهای l_1 و c_0 را می‌توان چنان نرم‌گذاری مجدد کرد که دارای FPP باشند؟

برای فضای l_1 پاسخ مثبت می‌دهد. اما هنوز نمی‌دانیم که

مسئله ۲.۷. آیا فضای c_0 را می‌توان چنان نرم‌گذاری مجدد کرد که دارای FPP باشد؟

قضیهٔ لین همچنین به سؤال زیر پاسخ منفی می‌دهد.

مسئله ۳.۷. آیا FPP تحت یک نرم‌گذاری مجدد از فضای باناخ X، پایدار می‌ماند؟

از سوی دیگر، فضاهای باناخی وجود دارند که دارای هیچ نرم‌گذاری مجددی با FPP نیستند، می‌دانیم که [۱۷]:

قضیه ۴.۷. *هر فضای باناخ یکریخت با l_∞ دارای FPP نیست.*

این قضیه، مسئلهٔ اساسی دیگری را مطرح می‌کند و آن اینکه

مسئله ۵.۷. همهٔ فضاهای باناخی را تعیین کنید که می‌توان آنها را طوری نرم‌گذاری مجدد کرد که دارای FPP باشند.

---

[۱] uniformly nonsquare Banach space

در سال ۱۹۷۱ دِی ثابت کرد که هر فضای باناخ جدایی‌پذیر را می‌توان چنان نرم‌گذاری مجدد کرد که *از هر سو به‌طور یکنواخت محدب* (به‌اختصار، UCED[1]) باشد [۸]. چون هر فضای UCED دارای ساختار بهنجار است [۱]، پس

قضیه ۶.۷. *هر فضای باناخ جدایی‌پذیر X را می‌توان چنان نرم‌گذاری مجدد که دارای FPP باشد.*

می‌دانیم فضای باناخ بازتابی وجود دارد که با هیچ فضای UCED یکریخت نیست [۲۷]. پس قضیهٔ بالا برای فضاهای بازتابی به‌کار نمی‌آید. در سال ۲۰۰۹ دومینگس بناویدس [۱۲] نشان داد که

قضیه ۷.۷ (دومینگس بناویدس، ۲۰۰۹). *هر فضای باناخ بازتابی X را می‌توان چنان نرم‌گذاری مجدد کرد که دارای FPP باشد.*

هنوز پرسش زیر نیز بدون پاسخ مانده است:

مسئله ۸.۷. آیا فضای باناخ $L_۱[۰,۱]$ را می‌توان چنان نرم‌گذاری مجدد کرد که دارای FPP باشد؟

دیدیم که FPP تحت یک نرم‌گذاری مجدد پایدار نیست و این خود، پرسش اساسی دیگری به نام *مسئلهٔ پایداری*[2] را مطرح می‌کند:

مسئله ۹.۷. فرض کنیم X یک فضا با FPP باشد. آیا عدد مثبت $d > ۱$ هست به‌طوری که اگر فضای باناخ Y یکریخت با فضای X باشد و فاصله باناخ-مازور[3] $d(X,Y) < d$، آن‌گاه Y دارای FPP باشد؟ در صورت وجود، بزرگترین d کدام است؟

در سال ۲۰۰۶ ، ماسکونیان نابارُ[4] [۳۶] نشان داد که

قضیه ۱۰.۷ (ماسکونیان نابارُ، ۲۰۰۶). *اگر $d(X,l_۲) < \sqrt{\frac{۵+\sqrt{۱۷}}{۲}}$، آن‌گاه فضای باناخ X دارای FPP است.*

هنوز نمی‌دانیم که آیا کران $\sqrt{\frac{۵+\sqrt{۱۷}}{۲}}$ دقیق است یا نه؟ در سال ۲۰۱۲، لین نتیجهٔ زیر را به‌دست آورد:

قضیه ۱۱.۷ (لین، ۲۰۱۲). *برای $۱ < p < \infty$، $C_p > ۱$ را کوچکترین ریشهٔ مثبت معادلهٔ*

$$C(C-۱) = [C^{\frac{۱}{p-۱}} + (۲C-۲)^{\frac{۱}{p-۱}}]^{p-۱}$$

بگیرید. اگر $d(X,l_p) < (C_p)^{\frac{۱}{p}}$، آن‌گاه X دارای FPP است.

[1] uniformly convex in every direction [2] stability problem [3] Banach-Mazur distance [4] Mazcuñan-Navarro

۸. مجموعه‌های بی‌کران و FPP

ممکن است از خود بپرسیم که چرا در تعریف FPP فرض می‌کنیم مجموعهٔ K کراندار باشد. پاسخ ساده است: اگر K بی‌کران باشد، دانش ما دربارهٔ وجود نقطهٔ ثابت نگاشت‌های ناافزا بر K بسیار کم است. گوییم فضای باناخ X دارای FPP برای هر زیرمجموعهٔ محدب و بی‌کران X است اگر برای هر زیرمجموعهٔ محدب و بی‌کران K از X، هر نگاشت ناافزای $T : K \to K$ دارای نقطهٔ ثابت باشد. اولین نتیجه را در این باره در سال ۱۹۸۰ ری[1] [۴۱] به‌دست آورد:

قضیه ۱.۸. *هیچ فضای هیلبرتی دارای FPP برای زیرمجموعه‌های محدب و بی‌کران نیست.*

سال‌ها گذشت و در این زمینه پیشرفتی حاصل نشد تا اینکه در سال ۲۰۱۲، دومینگس بناویدس[2] [۱۵] نشان داد که

قضیه ۲.۸. *c_0 برای زیرمجموعه‌های محدب و بی‌کران دارای FPP نیست.*

و پرسش مهمی که در این زمینه سال‌ها است بدون پاسخ مانده است:

مسئله ۳.۸. آیا زیرمجموعهٔ محدب و بی‌کرانی از یک فضای باناخ X وجود دارد که دارای FPP برای نگاشت های ناافزا باشد؟

۹. نگاشت‌های چندمقداری

فرض کنیم (M,d) یک فضای متری کامل باشد. $\mathbb{M}$ را گردایهٔ همهٔ زیرمجموعه‌های ناتهی، بسته و کراندار M بگیرید. برای هر $A,B\in\mathbb{M}$ تعریف می‌کنیم

$$H(A,B)=\max\left\{\sup_{a\in A}\inf_{b\in B} d(a,b), \sup_{b\in B}\inf_{a\in A} d(a,b)\right\}.$$

در این صورت، $(\mathbb{M},H)$ یک فضای متری کامل است. $x\in M$ را یک نقطهٔ ثابت نگاشت چندمقداری $T:(M,d)\to(\mathbb{M},H)$ نامیم اگر $x\in Tx$. نگاشت چندمقداری $T:(M,d)\to(\mathbb{M},H)$ را انقباضی گوییم اگر ثابت $0\le k<1$ موجود باشد به‌طوری که

$$H(Tx,Ty)\le kd(x,y) \qquad \forall\, x,y\in M.$$

نادلِر اولین قضیهٔ نقطهٔ ثابت برای نگاشت‌های چندمقداری را در [۳۹] به‌دست آورد که تعمیمی از قضیهٔ انقباضی باناخ است.

[1] Ray [2] Domínguez-Benavides

قضیه ۱.۹ (نادلر، ۱۹۶۹). *اگر (M,d) یک فضای متری کامل باشد، آن‌گاه هر نگاشت انقباضی $T:(M,d)\to(\mathbb{M},H)$ نقطهٔ ثابت دارد.*

فرض کنیم X یک فضای باناخ و K یک زیرمجموعهٔ ناتهی، بسته، محدب و کراندار از X باشد. نگاشت $T:K\to\mathbb{K}$ را ناافزای چندمقداری[۱] گوییم اگر

$$H(Tx,Ty)\le\|x-y\| \qquad \forall\, x,y\in K.$$

فضای باناخ X دارای ویژگی نقطهٔ ثابت چندمقداری (MFPP) برای نگاشت‌های ناافزای چندمقداری است اگر هر نگاشت ناافزای چندمقداری $T:K\to KC(K)$ دارای نقطهٔ ثابت باشد که K یک زیرمجموعهٔ ناتهی، محدب، بسته و کراندار از X و $KC(K)$ گردایهٔ همهٔ زیرمجموعه‌های ناتهی، محدب و فشرده K است. همچنین فضای باناخ X دارای ویژگی نقطهٔ ثابت ضعیف چندمقداری (WMFPP) برای نگاشت‌های ناافزای چندمقداری است اگر هر نگاشت ناافزای چندمقداری $T:K\to KC(K)$ دارای نقطهٔ ثابت باشد که K یک زیرمجموعهٔ ناتهی، محدب و فشرده ضعیف X است. لیم[۲] [۳۱] در سال ۱۹۸۰ نخستین قضیهٔ اساسی را در نظریهٔ نقطهٔ ثابت نگاشت‌های ناافزای چندمقداری به‌دست آورد:

قضیه ۲.۹ (لیم، ۱۹۸۰). *فرض کنیم X یک فضای به‌طور یکنواخت محدب و K یک زیرمجموعهٔ ناتهی، بسته، محدب و کراندار از X باشد. در این صورت، هر نگاشت ناافزای چندمقداری $T:K\to\mathbb{K}$ با مقادیر فشرده، نقطهٔ ثابت دارد. پس هر فضای به‌طور یکنواخت محدب دارای MFPP است.*

دومینگس بناویدس و گابیرا [۱۳] در سال ۲۰۰۷ نشان دادند که

قضیه ۳.۹ (دومینگس بناویدس و گابیرا، ۲۰۰۷). *اگر X یک فضای به‌طور یکنواخت هموار باشد، آن‌گاه X دارای MFPP است.*

هنوز نمی‌دانیم که آیا قضیهٔ کِرک برای نگاشت‌های ناافزای چندمقداری برقرار است یا نه [۱۴]:

مسئله ۴.۹. فرض کنیم X یک فضای باناخ با ساختار بهنجار باشد. آیا X دارای WMFPP است؟

مقاله را با دو پرسش کلی‌تر زیر که بدون پاسخ مانده‌اند، به پایان می‌بریم.

مسئله ۵.۹. (۱) فرض کنید X یک فضای باناخ باشد که دارای FPP است. آیا X دارای MFPP نیز است؟ (۲) فرض کنید X یک فضای باناخ باشد که دارای WFPP است. آیا X دارای WMFPP نیز است؟

[۱] multivalued nonexpansive map [۲] Lim

تشکر و قدردانی: این مقاله بر اساس سخنرانی اینجانب در پنجمین سمینار آنالیز تابعی و کاربردهای آن، که در تیرماه سال ۱۳۹۶ در دانشگاه زنجان برگزار گردید، نگاشته شده است. بر خود لازم می‌دانم که از دبیر علمی این سمینار، جناب آقای دکتر سعید مقصودی، صمیمانه سپاسگزاری نمایم.

مراجع

[1] Aksoy, A. G., Khamsi, M. A., *Nonstandard Methods in Fixed Point Theory*, Springer-Verlag, New York, 1990.

[2] Alspach, D. E., A fixed point free nonexpansive map, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **82** (1981), 423–424.

[3] Ayerbe Toledano, J. M., Domínguez-Benavides, T., Lopez Acedo, G., *Measures of Noncompactness in Metric Fixed Point Theory,* Birkhäuser Verlag, New York,1997.

[4] Brodskii, M. S., Milman, D. P., On the center of a convex set, *Dokl. Akad. Nau. S.S.S.R.*, **59** (1948), 837–840.

[5] Browder, F. E., Fixed point theorems for noncompact mappings in Hilbert spaces, *Proc. Nat. Acad. Sci.*, **43** (1965), 1272–1276.

[6] Browder, F. E., Nonexpansive nonlinear operators in a Banach space, *Proc. Nat. Acad. Sci.*, **54** (1965), 1041–1044.

[7] Clarkson, J. A., Uniformly convex spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **40** (1936), 396–414

[8] Day, M. M., James, R. C., Swaminathan, S. L., Normed linear spaces that are uniformly convex in every direction, *Can. J. Math.*, XXIII (**6**) (1971), 1051–1059.

[9] Dhompongsa, S., Kaewkhao, A., A note on properties that imply the weak fixed point property, *Abstr. Appl. Anal.*, (2006), Article 34959, 12 pp.

[10] Dhompongsa, S., Kaewkhao, A., Tasena, S., On a generalized James constant, *J. Math. Anal. Appl.*, **285** (2003), no. 2, 419–435.

[11] Domínguez-Benavides, T., A geometrical coefficient implying the fixed point property and stability results, *Houston J. Math.,* **22** (1996), no. 4, 835–849.

[12] Domínguez-Benavides,T., A renorming of some nonseparable Banach spaces with the fixed point property, *J. Math. Anal. Appl.,* **350** (2009), no. 2, 525–530.

[13] Domínguez-Benavides, T., Gavira, B., The fixed point property for multivalued nonexpansive mappings, *J. Math. Anal. Appl.,* **328** (2007), 1471–1483.

[14] Domínguez-Benavides, T., Gavira, B., Does Kirk's theorem hold for multivalued nonexpansive mappings?, *Fixed Point Theory and Applications* Volume 2010, Article ID 546761, 20 pages.

[15] Domínguez-Benavides, T., The failure of the fixed point property for unbounded sets in $c_\circ$, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **140** (2012), no. 2, 645–650.

[16] Dowling, P. N., Lennard, C. J., Every nonreflexive subspace of $L_۱[\circ, ۱]$ fails the fixed point property, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **125** (1997), no. 2, 443–446.

[17] Dowling, P. N., Lennard, C. J., Turett, B., Renormings of $l_۱$ and $c_\circ$ and fixed point properties, *Handbook of Metric Fixed Point Theory*, pp. 269–297, Kluwer, Dordrecht, 2001.

[18] Dowling, P. N., Randrianantoanina, N., Spaces of compact operators on a Hilbert space with the fixed point property, *J. Funct. Anal.*, **168** (1999), 111–120.

[19] García-Falset, J., The Fixed Point Property in Banach Spaces with the NUS-Property, *J. Math. Anal. Appl.,* **215** (1997), 532–542.

[20] García-Falset, J., Llorens-Fuster, E., Mazcuñan-Navarro, E. M., Banach spaces which are r-uniformly noncreasy, *Nonlinear Anal.*, **53** (2003), 957–975.

[21] García-Falset, J., Llorens-Fuster, E., Mazcuñan-Navarro, E. M., Uniformly nonsquare Banach spaces have the fixed point property for nonexpansive mappings , *J. Funct. Anal.,* **233** (2006) 494–514.

[22] Goebel, K., Kirk, W. A., *Topics in Metric Fixed Point Theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[23] Hyers, D. H., Isac, G., Rassias, T. M., *Topics in Nonlinear Analysis and Applications*, World Scientific, 1997.

[24] Jiménez-Melado, A., Llorens-Fuster, E., Mazcuñán-Navarro, E. M., The Dunkl–Williams constant, convexity, smoothness and normal structure, *J. Math. Anal. Appl.,* **342** (2008), no. 1, 298–310.

[25] Jiménez-Melado, A., Llorens-Fuster, E., Saejung, S., The von Neumann–Jordan constant, weak orthogonality and normal structure in Banach spaces, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **134** (2006), no. 2, 355–364.

[26] Kirk, W. A., Sims, B., *Handbook of Metric Fixed Point Theory*, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2001.

[27] Kutzarova, D. N., Troyanski, S. L., Reflexive Banach spaces without equivalent norms which are uniformly convex or uniformly differentiable in every direction, *Studia Math.,* **72** (1982), no. 1, 1–95.

[28] Kirk, W. A., A fixed point theorem for mappings which do not increase distances, *Amer. Math. Monthly*, **72** (1965), 1004–1006.

[29] Karlovitz, L. A., Existence of a fixed point for a nonexpansive map in a space without normal structure, *Pacific J. Math.*, **66** (1976), 153–159.

[30] Lau, A.T.-M., Mah, P. F., Ülger, A., Fixed point property and normal structure for Banach spaces associated to locally compact groups, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **125** (1997), 2021–2027.

[31] Lim, T. C., Asymptotic center and nonexpansive mappings in conjugate Banach spaces, *Pacific J. Math.*, **90** (1980), 135–143.

[32] Lin, P. K., Unconditional bases and fixed points of nonexpansive mappings, *Pacific J. Math.*, **116** (1985), 69–76.

[33] Lin, P. K., There is an equivalent norm on l_1 that has the fixed point property, *Nonlinear Anal.*, **68** (2008), no. 8, 2303–2308.

[34] Lin, P. K., Fixed point theory and nonexpansive mappings, *Arab J. Math.*, **1** (2012), 495–509.

[35] Maluta, E., Uniformly normal structure and related coefficients. *Pacific J. Math.*, **111** (1984), no. 2, 357–369.

[36] Mazcuñan-Navarro, E. M., Stability of the fixed point property in Hilbert spaces, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **134** (2006), no. 1, 129–138.

[37] Mazcuñán-Navarro, E. M., Banach space properties sufficient for normal structure, *J. Math. Anal. Appl.,* **337** (2008), no. 1, 197–218.

[38] Maurey, B., Points fixes des contractions de certains faiblement compacts de L^1, *Seminaire d'Analyse Fonctionelle*, 1980–1981, Centre de Mathématiques, Ecole Polytech., Palaiseau, ′ 1981, Exp. No. VIII, 19 pp.

[39] Nadler, S. B., Multi-valued contraction mappings, *Pacific J. Math.*, **30** (1969), 415–487.

[40] Prus, S., A remark on a theorem of Turett, *Bull. Pol. Acad. Sci. Math.*, **36** (1989), no. 5-6, 225–227.

[41] Ray, W. O., The fixed point property and unbounded sets in Hilbert space, *Trans. Amer. Math. Soc.,* **258** (1980), 531–537.

[42] Reich, S., The almost fixed point property for nonexpansive mappings, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **88** (1983), no. 1, 44–46.

[43] Saejung, S., On James and von Neumann–Jordan constants and sufficient conditions for the fixed point property, *J. Math. Anal. Appl.,* **323** (2006), 1018–1024.

[44] Shafrir, I., The approximate fixed point property in Banach and hyperbolic spaces, *Israel J. Math.*, **71** (1990), no. 2, 211–223.

[45] Sims, B., Orthogonality and fixed points of nonexpansive maps, *Workshop/Miniconference on Functional Analysis and Optimization* (Canberra, 1988), Proceedings of the Centre for Mathematics and its Applications, Australian National University, vol. 20, Australian National University, Canberra, 1988, pp. 17.

[46] Turett, B., A dual view of a theorem of Baillon, in: Nonlinear Analysis and Applications, In: *Lecture Notes in Pure and Appl. Math.*, vol. **80**, Dekker, New York, 1982, p. 279–286.

تاریخ ارسال: ۱۳۹۷/۱۰/۱۴؛ تاریخ بازنگری: ۱۳۹۸/۱/۳؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۸/۱/۲۲

علیرضا امینی هرندی: دانشگاه اصفهان

رایانامه: a.amini@sci.ui.ac.ir