فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۴۶ (بهار ۱۳۹۰) صص. ۱۹ تا ۳۵

نظریه‌های انتگرال‌گیری دانژوا، پرون و هنستاک ـ کورزویل روی خط حقیقی

سعید مقصودی

چکیده

نظریهٔ انتگرال‌گیری ریمان در عین سادگی و زیبایی، کاستی‌هایی نیز دارد. نظریهٔ انتگرال لبگ پیشرفت قابل توجهی نسبت به نظریهٔ ریمان به حساب می‌آید و بسیاری از کاستی‌های آن را رفع می‌کند. در عین حال، همچنان برخی از همان کاستی‌ها را دارد. مثلاً شرط انتگرال‌پذیری همچنان در قضیهٔ اساسی حسابان باید اضافه گردد. در جهت رفع این مشکل و به‌دست آوردن نظریه‌ای به قدرت نظریهٔ لبگ با پرداخت هزینه‌ای کمتر، ریاضیدانان بسیاری، نظریه‌های جانشینی پیشنهاد کرده‌اند. در این مقاله به برخی از مهمترین این نظریه‌ها اشاره می‌کنیم.

۱. مقدمه

نظریه‌های انتگرال ریمان و لبگ، علی‌رغم سادگی و قدرت نسبی آن‌ها، کاستی‌هایی نیز دارند؛ برای مثال [۱۱] را ببینید. به‌منظور رفع کاستی‌های نظریهٔ لبگ و به‌ویژه به‌دست آوردن نظریهٔ انتگرالی که در آن قضیهٔ اساسی حسابان در کلی‌ترین صورتش برقرار باشد، ریاضیدانان بعد از لبگ نظریه‌های مختلفی ارائه کرده‌اند. اولین نظریه از این نوع، متعلق به ریاضیدان فرانسوی آرنود دانژوا[1] است که آن را در سال ۱۹۱۲ معرفی کرد. بعد از آن، اسکار پرون[2]، ریاضیدان آلمانی، در سال ۱۹۱۴ نظریهٔ ساده‌تری نسبت به نظریهٔ دانژوا ارائه کرد. اما از همه ساده‌تر و زیباتر، نظریه‌ای است که یاروسلاو کورزویل[3] ریاضیدان اهل چک، در سال ۱۹۵۸ و تقریباً همزمان و مستقل از او

1) Arnaud Denjoy (1884-1974)   2) Oskar Perron (1880-1975)   3) Jarslov Kurzweil (1926-)

رالف هنستاک[1] انگلیسی، در سال ۱۹۶۴ ارائه کردند. نکتهٔ جالب این است که علی‌رغم رویکردهای متفاوتی که این ریاضیدانان درپیش گرفتند، نظریه‌های آن‌ها هم ارز از آب درآمد. در سال ۱۹۷۳، ادوارد جی. مک‌شین[2]، ریاضیدان آمریکایی، شیوه‌ای همانند ریمان برای رسیدن به انتگرال لبگ به‌کار گرفت. نتیجهٔ آن، کوتاه شدن راه رسیدن به نظریه‌ای به قدرت نظریهٔ لبگ بدون نیاز به پروراندن نظریهٔ اندازه روی مجموعهٔ $\mathbb{R}$ بود. برای شرحی از این نظریه‌ها و دیگر مطالب وابسته، مرجع خواندنی [۱۹] را ببینید. همچنین برای اثبات بسیاری از قضایا که در اینجا بدون اثبات آورده‌ایم، به [۵] مراجعه کنید. اکنون با حفظ ترتیب تاریخی ارائهٔ نظریه‌های انتگرال‌گیری مذکور، با نظریهٔ دانژوا شروع می‌کنیم.

۲. انتگرال دانژوا

لبگ در رسالهٔ دکتری خود قادر به گسترش قضیهٔ اساسی حسابان به مشتق‌های دینی نبود. وی در سال ۱۹۰۴ با معرفی آنچه زنجیره‌ای از بازه‌ها نامید، نه تنها اثبات ساده‌ای برای حالت‌های قبلی آورد، بلکه قضیه را برای مشتق‌های دینی متناهی نیز اثبات کرد. اما برای حالتی که مشتق‌های دینی متناهی یا انتگرال‌پذیر نباشند، فقط راهی برای تعمیم نظریهٔ انتگرال خود پیشنهاد کرد و در عین‌حال با مثال‌هایی نشان داد این تعمیم، حالت‌های معمول را در بر نمی‌گیرد. در سال ۱۹۰۵ هانس هان[3] تابعی مثال می‌زند که توسط مشتقش مشخص نمی‌شود و در نتیجه به‌وسیله انتگرال‌گیری از مشتق تابع، قابل بازیابی نیست. مقالهٔ هان باعث شد لبگ مسأله را برای دسته‌ای خاص از توابع مطرح کند. ولی کوشش‌هایش برای یافتن جواب، بی‌نتیجه ماند. بنابراین، مسأله در چارچوب نظریهٔ لبگ جواب ندارد.

دانژوا اولین گام‌ها را در جهت حل این مسأله برمی‌دارد. وی روش‌های لبگ را برای بازیابی تابع از مشتقش به‌کار می‌گیرد. دانژوا زمانی که هنوز در اکول نرمال دانشجو بود، در کلاس‌های درس بئر[4] دربارهٔ توابع ناپیوسته حاضر می‌شد و با روش‌های اعداد ترامتناهی[5] بئر به‌خوبی آشنا بود. با ترکیب مشاهدات لبگ و تکنیک‌های بئر، تعریف انتگرال را به توابع متناهی ـ مقدار که انتگرال‌پذیر لبگ نیستند، تعمیم داد و قضیهٔ حسابان را برای آن اثبات کرد. این نتایج را در سال ۱۹۱۲ در [۲] و [۳] منتشر کرد. وی تحلیل مبسوط‌تری را از انتگرال خود در [۴] ارائه کرد و فرایند محاسبه انتگرالش را جمع‌گیری[6] نامید. این فرایند بسیار پیچیده است و در آن استفادهٔ زیادی از اعداد ترامتناهی می‌شود. چند ماه بعد از کار دانژوا، ریاضیدان روسی ن. لوزین[7] انتگرال دانژوا را با تعریف معادل مفهوم پیوستگی مطلق تعمیم‌یافته ارتباط داد و اولین تعریف توصیفی از انتگرال دانژوا را ارائه داد که به‌دلیل سادگی، امروزه به‌جای تعریف اصلی دانژوا استفاده می‌شود. برای شرح مختصری از تعریف اولیهٔ دانژوا، مرجع [۱۸] را ببینید.

---

1) Ralph Henstock (1925-2007) 2) Edward J. McShane(1904-1989) 3) Hans Hahn
4) R. Baire 5) transfinite numbers 6) totalization 7) N. Lusin

تعریف ۱.۲. تابع $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ را بر مجموعهٔ $E\subseteq[a,b]$

۱) پیوستهٔ مطلق[1] گوییم اگر برای هر $\varepsilon>0$، عدد $\delta>0$ موجود باشد به‌طوری که $\sum_{i=1}^{n}|f(d_i)-f(c_i)|<\varepsilon$ که در آن $\{[c_i,d_i]:1\leq i\leq n\}$ مجموعهٔ متناهی و دلخواه از بازه‌هایی با درون مجزا است طوری که نقاط انتهایی آن‌ها در E قرار دارد و $\sum_{i=1}^{n}(d_i-c_i)<\delta$.

۲) پیوستهٔ مطلق تحدیدی[2] گوییم هرگاه برای هر $\varepsilon>0$، عدد $\delta>0$ وجود داشته باشد به‌طوری که $\sum_{i=1}^{n}\omega(f,[c_i,d_i])<\varepsilon$ برای هر مجموعهٔ متناهی $\{[c_i,d_i]:1\leq i\leq n\}$ از بازه‌هایی که درون مجزا دارند و نقاط انتهایی آن‌ها در E قرار دارد و $\sum_{i=1}^{n}(d_i-c_i)<\delta$. یاد آوری می‌کنیم که $\omega(f,[c,d])$ نوسان تابع روی بازهٔ $[c,d]$ است:

$$\omega(f,[c,d])=\sup\{|f(y)-f(x)|:c\leq x\leq y\leq d\}.$$

۳) پیوستهٔ مطلق تعمیم‌یافته[3] نامیم هرگاه تحدید f به E پیوسته باشد و E را بتوان به‌صورت اجتماع شمارایی از مجموعه‌هایی نوشت که f روی آن‌ها پیوسته مطلق است. تابع f را پیوسته مطلق تعمیم‌یافتهٔ تحدیدی روی E گوییم هرگاه E را بتوان به‌صورت اجتماع شمارا از مجموعه‌هایی نوشت که f روی آن‌ها پیوستهٔ مطلق تحدیدی است.

تعریف آشنای مجموعهٔ پوچ[4] را که اغلب در صورت‌بندی قضیه‌ها استفاده می‌شود، یادآوری می‌کنیم. $N\subset\mathbb{R}$ پوچ است هرگاه برای هر $\varepsilon>0$ خانوادهٔ شمارا $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ از بازه‌های باز یافت شود به‌طوری که

$$N\subseteq\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n,\quad \sum_{n=1}^{\infty}\ell(I_n)<\varepsilon$$

که در آن $\ell(I)$ طول بازهٔ I را نشان می‌دهد. همچنین گوییم خاصیت P تقریباً همه‌جا روی مجموعهٔ $A\subseteq\mathbb{R}$ برقرار است هرگاه مجموعهٔ نقاطی از A که خاصیت P را ندارند، مجموعه‌ای پوچ باشد.

یادآوری می‌کنیم که تابع $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ انتگرال‌پذیر لبگ است اگر و تنها اگر تابع پیوستهٔ مطلق F یافت شود که $F'=f$ تقریباً همه‌جا؛ برای اثبات [۱۱] را ببینید. انتگرال دانژوا به‌نوعی تعمیم همین خاصیت مشخص‌کنندهٔ انتگرال لبگ است. اکنون آماده‌ایم تعریف انتگرال دانژوا را مطابق رویکرد لوزین بیان کنیم.

1) absolutely continuous 2) restricted absolutely continuous 3) generalized absolutely continuous 4) null set

تعریف ۲.۲. [**لوزین، ۱۹۱۲**] تابع $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ روی $[a, b]$ انتگرال‌پذیر دانژوا است هرگاه تابع پیوسته مطلق تعمیم‌یافتهٔ تحدیدی $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ یافت شود به‌طوری که $F' = f$ تقریباً همه‌جا روی $[a, b]$.

انتگرال دانژوا خواص معمول انتگرال ریمان و لبگ مانند خطی بودن و مثبت بودن را داراست. دو قضیهٔ زیر که انگیزهٔ اصلی دانژوا برای معرفی انتگرال جدید بوده است، تقریباً بدون زحمت زیاد قابل اثبات‌اند.

قضیه ۳.۲. **(قضیهٔ اساسی حسابان، صورت اول)** فرض کنید $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ پیوسته و تقریباً همه‌جا مشتق‌پذیر باشد. در این صورت f' انتگرال‌پذیر است و

$$\int_a^x f' = f(x) - f(a)$$

برای هر $x \in [a, b]$.

قضیهٔ بالا در نظریهٔ انتگرال لبگ نیز برقرار است، اما باید دقت کرد شرط انتگرال‌پذیری f' در آنجا جزء مفروضات قضیه است و نه حکم قضیه.

قضیهٔ ۴.۲. **(قضیهٔ اساسی حسابان، صورت دوم)** فرض کنید $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ انتگرال‌پذیر دانژوا باشد. قرار دهید $F(x) = \int_a^x f$. در این صورت تابع F روی $[a, b]$ پیوسته و تقریباً همه‌جا مشتق‌پذیر است و داریم $F' = f$ تقریباً همه‌جا.

مثال زیر نشان می‌دهد که دامنهٔ توابع انتگرال‌پذیر دانژوا وسیع‌تر از توابع انتگرال‌پذیر لبگ است.

مثال ۵.۲. تابع $f : [۰, ۱] \to \mathbb{R}$ را با ضابطهٔ

$$f(x) = \begin{cases} ۲x \cos(\frac{\pi}{x^۲}) + \frac{۲\pi}{x} \sin(\frac{\pi}{x^۲}), & ۰ < x \leq ۱ \\ ۰, & x = ۰ \end{cases}$$

در نظر بگیرید. f انتگرال‌پذیر لبگ نیست در حالی‌که طبق قضیهٔ ۳.۲، انتگرال‌پذیر دانژوا است. در واقع f مشتق تابع زیر است:

$$g(x) = \begin{cases} x^۲ \cos \frac{\pi}{x^۲}, & ۰ < x \leq ۱ \\ ۰, & x = ۰. \end{cases}$$

برای ملاحظهٔ جزئیات بیشتر می‌توانید مثلاً به [۱۱] مراجعه کنید.

۳. انتگرال پرون

در سال ۱۹۱۴، ا. پرون گسترش دیگری از انتگرال لبگ ارائه کرد که در آن مشتق هر تابع دلخواه، انتگرال‌پذیر است [۱۷]. کار وی مستقل از دانژوای فرانسوی بود و رویکردی کاملاً متفاوت نیز داشت. پرون خاصیتی از انتگرال لبگ را برای تعمیم برمی‌گزیند که اکنون آن را شرح می‌دهیم.

برای این کار، نیاز به چند تعریف داریم. در ادامه، مجموعهٔ اعداد حقیقی گسترش‌یافته را با $\mathbb{R}^*$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱.۳. فرض کنید $f : [a,b] \to \mathbb{R}^*$ یک تابع باشد.

۱ — مشتق بالایی f در نقطهٔ x عبارت است از

$$\overline{D}\, f(x) = \limsup_{t\to x} \frac{f(t)-f(x)}{t-x}.$$

و مشتق پایینی f در نقطهٔ x عبارت است از

$$\underline{D}\, f(x) = \liminf_{t\to x} \frac{f(t)-f(x)}{t-x}.$$

۲ — $U : [a,b] \to \mathbb{R}^*$ را یک تابع مافوق[1] برای f روی $[a,b]$ می‌نامند هرگاه $\underline{D}\, U(x) > -\infty$ و $\underline{D}\, U(x) \geq f(x)$ برای هر $x \in [a,b]$.

۳ — $V : [a,b] \to \mathbb{R}^*$ را یک تابع مادون [2] برای f روی $[a,b]$ می‌نامند هرگاه $\overline{D}\, V(x) < \infty$ و $\overline{D}\, V(x) \leq f(x)$ برای هر $x \in [a,b]$.

برای راحتی، عبارت $U(b)-U(a)$ را با U_a^b نشان می‌دهیم. به همین ترتیب، برای $V(b)-V(a)$ عمل می‌کنیم. به‌راحتی می‌توان دید اگر تابع f مشتق‌پذیر باشد، تابع $f - f(a)$ یک تابع مافوق و در عین‌حال مادون برای f روی $[a,b]$ است.

قضیهٔ زیر، انتگرال لبگ را برحسب مفاهیم تعریف شده در بالا مشخص می‌کند.

قضیه ۲.۳. تابع اندازه‌پذیر $f : [a,b] \to \mathbb{R}^*$ انتگرال‌پذیر لبگ است اگر و تنها اگر برای هر $\varepsilon > 0$ توابع پیوستهٔ مطلق به‌ترتیب، مافوق و مادون U و V برای f روی $[a,b]$ یافت شود که $U_a^b - V_a^b < \varepsilon$.

می‌توان نشان داد اگر U و V به‌ترتیب، توابع مافوق و مادون برای f روی $[a,b]$ باشند، آن‌گاه تابع $U - V$ روی $[a,b]$ صعودی است. پس $V_a^b \leq U_a^b$ و $0 \leq U_c^d - V_c^d \leq U_a^b - V_a^b$ برای هر $c,d \in [a,b]$. به‌ویژه

$$\sup\{V_a^b :\ \text{یک تابع مادون برای } f \text{ است } V\} \leq \inf\{U_a^b :\ \text{یک تابع مافوق برای } f \text{ است } U\}$$

و دو طرف نامساوی، متناهی هستند.

تعریف انتگرل پرون به‌قرار زیر است.

---

1) major 2) minor

تعریف ۳.۳. [**پرون، ۱۹۱۴**] تابع $f : [a,b] \to \mathbb{R}^*$ انتگرال‌پذیر پرون است هرگاه حداقل یک تابع مافوق و یک تابع مادون روی $[a,b]$ داشته باشد و

$$\inf\{U_a^b : \text{ یک تابع مافوق برای } f \text{ است } U\} = \sup\{V_a^b : \text{ یک تابع مادون برای } f \text{ است } V\}$$

مقدار مشترک فوق، انتگرال پرون تابع f روی $[a,b]$ نامیده و با $\int_a^b f$ نمایش داده می‌شود.

انتگرال پرون نیز تمامی خواص معمول انتگرال، مانند خطی بودن و مثبت بودن را داراست؛ مرجع [۵] را ببینید.

۴. انتگرال هنستاک ـ کورزویل

در خلال دههٔ ۱۹۵۰، ی. کورزویل در حین مطالعاتش دربارهٔ معادلات دیفرانسیل [۱۲]، نوعی انتگرال، شبیه انتگرال ریمان را ارائه کرد. این نوع انتگرال دارای این خاصیت جالب است که به‌وسیله آن، هر تابع پیوسته از مشتق آن قابل بازیابی است. کمی بعد از کورزویل و البته مستقل از او، ر. هنستاک نیز تعمیم مشابهی از انتگرال ریمان به‌دست می‌آورد. وی در کتابی که در همین زمینه منتشر کرد [۱۰]، می‌نویسد: «از سال ۱۹۵۸، به‌منظور ساده‌کردن نظریهٔ انتگرال‌های عامل ـ همگرا[۱]، رویکردهای وارد[۲]، جفری[۳] و میلر[۴] را ترکیب کردم و نتیجهٔ آن، مفهوم N ـ انتگرال شد. نظریه‌های مطرح شده در [۷] و [۹] روشن کرد که یک انتگرال توصیفی، یعنی انتگرال N ـ تغییراتی قابل تعریف است. صورت ساده‌ای از این نظریه که در آن همگرایی عامل‌ها حذف شده است انتگرال تغییراتی معرفی شده در [۶] است. گام بعدی که ما را به گونه‌ای از انتگرال ریمانی برمی‌گرداند، انتگرال کامل ریمانی تعریف شده در [۸] است. این گونه انتگرال، انتگرال‌های ریمان، ریمان ـ اشتیلیس، پولارد ـ گچل، بورکیل، لبگ، دانژوا، پرون و انتگرال‌های وارد و انتگرال‌های رادون[۵] برای توابع پیوسته را شامل می‌شود.»

در تعریف انتگرال ریمان، رفتار تابع در انتخاب افراز خیلی مورد توجه قرار نمی‌گیرد. ملاک خوب بودن افراز با کوچکتر بودن اندازهٔ افراز از عدد معینی، مشخص می‌شود و توجهی به انتخاب نقطهٔ بینی نیز نمی‌شود. افراز، مستقل از رفتار تابع انتخاب می‌شود. اما در این تعریف جدید، آزادی بیشتری به انتخاب افراز داده می‌شود. در واقع، هنستاک و کورزویل صورت کمی پیچیده‌تر از تعریف ریمان را استفاده می‌کنند. این تعریف همان سادگی و زیبایی انتگرال ریمان را داراست و در عین‌حال بسیار قدرتمندتر از نظریهٔ لبگ است.

قبل از معرفی انتگرال هنستاک ـ کورزویل، نیاز به برخی تعاریف داریم که اکنون آن‌ها را بیان می‌کنیم. در تعریف زیر که همان تعریف معمول در انتگرال ریمان است، به نقطهٔ بینی بیشتر اهمیت داده شده است.

1) factor-convergent 2) Ward 3) Jeffery 4) Miller 5) J. Radon

تعریف ۱.۴. بازهٔ بسته و کراندار $I = [a,b]$ را در نظر بگیرید. یک افراز برای I عبارت است از مجموعهٔ متناهی $\mathcal{P} = \{I_i : i = ۱, ۲, \ldots, n\}$ از زیربازه‌های بسته و کراندار I_i با درون مجزا به‌طوری که $I = \bigcup_{i=۱}^{n} I_i$. چنانچه برای هر زیربازهٔ I_i یک نقطهٔ $t_i \in I_i$ نسبت داده شود، نقطهٔ t_i را یک نشان[۱] برای I_i می‌نامیم و در این حالت، افراز $\mathcal{P}$ را یک افراز نشان‌دار[۲] می‌گوییم و می‌نویسیم

$$\dot{\mathcal{P}} = \{(I_i, t_i) : ۱ \leq i \leq n\}$$

و یا به‌طور ساده‌تر $\dot{\mathcal{P}} = \{(I_i, t_i)\}$. اگر $\dot{\mathcal{P}} = \{(I_i, t_i)\}$ یک افراز نشان‌دار باشد، منظور از مجموع ریمانی تابع $f : I \to \mathbb{R}$ نظیر $\dot{\mathcal{P}}$ عبارت است از

$$S(f, \dot{\mathcal{P}}) = \sum_{i=۱}^{n} f(t_i)\ell(I_i),$$

که در آن $\ell(I_i)$ طول بازهٔ I_i را نشان می‌دهد.

تعریف زیر تمایز اساسی بین رویکرد ریمان و هنستاک ــ کورزویل را در نگاه به افرازها نمایان می‌کند.

تعریف ۲.۴. فرض کنید $I = [a,b] \subseteq \mathbb{R}$.

۱ــ تابع $\delta : I \to \mathbb{R}$ را یک پیمانه[۳] روی I می‌نامیم هرگاه $\delta(t) > ۰$ برای هر $t \in I$.

۲ــ فرض کنید $\dot{\mathcal{P}} = \{(I_i, t_i)\}$ یک افراز نشان‌دار باشد. اگر δ یک پیمانه روی I باشد، گوییم افراز $\dot{\mathcal{P}}$، δ ــ ظریف[۴] است هرگاه برای هر i داشته باشیم

$$I_i \subseteq [t_i - \delta(t_i), t_i + \delta(t_i)].$$

گاهی اوقات به جای δ ــ ظریف، می‌گوییم $\dot{\mathcal{P}}$ مقید به[۵] δ است و می‌نویسیم $\dot{\mathcal{P}} << \delta$.

مثال ۳.۴. اگر $\delta > ۰$ عدد ثابتی باشد، می‌توان $\delta : I \to \mathbb{R}$ را به‌صورت $\delta(t) = \delta$ برای هر $t \in I$ تعریف کرد. چنین پیمانه‌ای را پیمانهٔ ثابت می‌نامند. یک افراز نشان‌دار، δ ــ ظریف است هرگاه $I_i \subseteq [t_i - \delta, t_i + \delta]$. از این‌رو خواهیم داشت $\ell(I_i) \leq ۲\delta$ برای هر i.

قضیه‌ای منسوب به پیر کوزن[۶] نشان می‌دهد که برای هر بازهٔ فشرده و هر تابع پیمانه روی آن، همواره یک افراز δ ــ ظریف موجود است. اکنون انتگرال به مفهوم هنستاک ــ کورزویل را معرفی می‌کنیم. شباهت‌ها و تفاوت‌های این تعریف با تعریف انتگرال ریمان کاملاً مشهود است.

تعریف ۴.۴ [**کورزویل، ۱۹۵۸ ــ هنستاک، ۱۹۶۰**] تابع $f : I = [a,b] \to \mathbb{R}$ را انتگرال‌پذیر هنستاک ــ کورزویل نامند، هرگاه عدد حقیقی A موجود باشد به‌طوری که برای هر $\varepsilon > ۰$، پیمانه δ_ε روی I موجود باشد چنان‌که برای هر افراز نشان دار δ_ε ــ ظریف $\dot{\mathcal{P}} = \{(I_i, t_i)\}$ داشته باشیم

$$|S(f, \dot{\mathcal{P}}) - A| < \varepsilon.$$

---

1) tag 2) tagged partition 3) gauge 4) fine 5) subordinate 6) P. Cousin

مقدار انتگرال را با $\int_I f$ یا $\int_I f(x)\,dx$ نشان می‌دهیم. گاهی اوقات انتگرال‌پذیری به مفهوم هنستاک ـ کورزویل را انتگرال ریمان تعمیم‌یافته می‌نامند. چنانچه $E \subseteq I$، گوییم f روی E انتگرال‌پذیر است هرگاه $f\chi_E$ انتگرال‌پذیر باشد. مجموعهٔ توابع انتگرال‌پذیر ریمان تعمیم‌یافته روی I را با $\mathcal{R}^*(I)$ نشان می‌دهیم.

در مثال زیر، انتگرال‌پذیری یک تابع آشنا را بررسی می‌کنیم.

مثال ۵.۴. تابع دیریکله $D : [0, 1] \to \mathbb{R}$ انتگرال‌پذیر ریمان نیست ولی دارای انتگرال ریمان تعمیم‌یافته، برابر صفر است. برای اثبات، فرض کنید $\{r_i\}_{i=1}^{\infty}$ شمارشی از اعداد گویا در بازهٔ $[0, 1]$ باشد. تابع $\delta : [0, 1] \to \mathbb{R}$ را به‌صورت

$$\delta(x) = \begin{cases} 1, & x \notin \mathbb{Q} \\ 2^{-i}c, & x = r_i \in \mathbb{Q}, \end{cases}$$

تعریف می‌کنیم که در آن $c > 0$ عدد ثابتی است. حال می‌توان ثابت کرد که تعریف انتگرال ریمان تعمیم‌یافته برای $A = 0$ برقرار است، پس $\int_0^1 D(x)\,dx = 0$.

اگر تابعی انتگرال‌پذیر ریمان باشد، با انتخاب پیمانهٔ ثابت می‌توان به‌راحتی انتگرال‌پذیری هنستاک ـ کورزویل آن را نشان داد. بنابراین اگر تابعی انتگرال‌پذیر ریمان باشد، انتگرال‌پذیر هنستاک ـ کورزویل نیز هست و مقدار این دو انتگرال با یکدیگر برابر است. خواص پایه‌ای انتگرال، برای انتگرال هنستاک ـ کورزویل نیز برقرار است؛ مرجع خواندنی [۱] را ببینید. انتگرال ریمان تعمیم‌یافته نیز همانند انتگرال‌های دانژوا و پرون انتگرال مطلق نیست. به عبارت دیگر، اگر تابعی انتگرال پذیر باشد، لزوماً قدرمطلق آن انتگرال‌پذیر نیست. این مطلب را مثال زیر نشان می‌دهد.

مثال ۶.۴. فرض کنید $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ با ضابطهٔ زیر تعریف شده باشد:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 1 \\ \frac{(-1)^{k+1}2^k}{k}, & x \in [c_{k-1}, c_k), \end{cases}$$

که در آن $c_k = 1 - 1/2^k$ برای $k = 0, 1, 2, \ldots$. می‌توان نشان داد که $\int_0^1 f = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$. در حالی‌که $\int_0^1 |f|$ موجود نیست.

کاستی دیگری که انتگرال ریمان تعمیم‌یافته و همچنین انتگرال‌های دانژوا و پرون دارند این است که نسبت به عمل ضرب بسته نیستند به این معنی که ضرب دو تابع انتگرال‌پذیر لزوماً انتگرال‌پذیر نیست.

مثال ۷.۴. f را همان تابع مثال ۶.۴ در نظر بگیرید و تابع $g:[0,1]\to\mathbb{R}$ را به‌صورت زیر تعریف کنید:

$$g(x)=\begin{cases} 0, & x=1\\ (-1)^{k+1}, & x\in[c_{k-1},c_k)\end{cases}$$

توابع f و g هر دو انتگرال‌پذیرند در حالی که $fg=|f|$ انتگرال‌پذیر نیست.

سادگی و زیبایی تعریف انتگرال تعمیم‌یافتهٔ ریمان چشمگیر است. دو موضوع هست که قدرت یک نظریهٔ انتگرال‌گیری را نشان می‌دهد: قضایای اساسی حسابان و دیگری قضایای عبور حد از انتگرال. برای بررسی این موضوع، ابتدا چند تعریف می‌آوریم.

تعریف ۸.۴. فرض کنید $I=[a,b]$ و $f,F:I\to\mathbb{R}$.

۱ـ F یک تابع اولیه یا پادمشتق f روی I است هرگاه F' موجود باشد و $F'(x)=f(x)$ برای هر $x\in I$.

۲ـ F یک c ـ اولیهٔ f است هرگاه F روی I پیوسته باشد و به‌جز روی یک مجموعهٔ شمارا، F' همه‌جا موجود و برابر f باشد.

۳ـ F یک a ـ اولیهٔ f است هرگاه F روی I پیوسته باشد و به‌جز روی یک مجموعه با اندازهٔ صفر، F' همه‌جا موجود و برابر f باشد.

۴ـ قرار دهید $F(x)=\int_a^x f$، گوییم $F:I\to\mathbb{R}$ یک انتگرال نامعین f روی I است.

قضیه ۹.۴. (**قضیهٔ اساسی حسابان، صورت اول**) اگر $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ دارای یک c ـ اولیهٔ F روی $[a,b]$ باشد، آن‌گاه $f\in\mathcal{R}^*([a,b])$ و

$$\int_a^b f=F(b)-F(a).$$

مثال زیر کاربردهایی از قضیهٔ فوق را نشان می‌دهد.

مثال ۱۰.۴. الف) فرض کنید $f:[0,1]\to\mathbb{R}$، $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ و $f(0)=0$. در این صورت $F(x)=-\frac{\sqrt{x}}{2}$ یک c ـ اولیهٔ تابع f است، در نتیجه

$$\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}dx=F(1)-F(0)=-1/2.$$

ب) فرض کنید $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ و $f(x)=x^2\cos\frac{\pi}{x^2}$ برای $0<x\leq 1$ و $f(0)=0$. تابع f' نه‌تنها انتگرال‌پذیر ریمان نیست بلکه دارای انتگرال لبگ نیز نمی‌باشد. اما طبق قضیهٔ بالا، f'

دارای انتگرال ریمان تعمیم‌یافته است و داریم $\int_0^1 f' = f(1) - f(0) = -1$. برای جزئیات بیشتر می‌توانید مثلاً به [۱۱] مراجعه کنید.

مثال بالا پیشرفت قابل توجهی را نه‌تنها نسبت به انتگرال ریمان بلکه نسبت به انتگرال لبگ نشان می‌دهد.

قضیه ۱۱.۴. (قضیهٔ اساسی حسابان، صورت دوم) اگر $f \in \mathcal{R}^*([a,b])$، آن‌گاه انتگرال نامعین f روی I پیوسته و تقریباً همه‌جا مشتق پذیر است و داریم $F'(x) = f(x)$.

سؤال طبیعی که در اینجا پیش می‌آید این است که آیا در دو قضیهٔ بالا نمی‌توان نتایج را به‌صورت قوی‌تری بیان کرد؟ مثلاً در قضیهٔ ۹.۴، c ـ اولیه را با a ـ اولیه و در قضیهٔ ۱۱.۴، تقریباً همه‌جایی را با مجموعه‌ای شمارا عوض کرد؟ جواب هر دو سؤال منفی است.

مثال ۱۲.۴. فرض کنید F_1، F_2، ... مجموعه‌هایی باشند که در ساخت مجموعهٔ کانتور معرفی می‌شوند. به عبارت دیگر، F_n اجتماع 2^n بازه به‌صورت $[k/3^n, (k+1)/3^n]$ است. ابتدا تابع $f_1 : [0,1] \to \mathbb{R}$ را با $f_1(0) = 0$، $f_1(1) = 1$ و $f_1(x) = 1/2$ برای $x \in F \setminus F_1$ و در دیگر نقاط به‌صورت تکه‌ای خطی تعریف می‌کنیم. به همین ترتیب، $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ با $f_n(0) = 0$، $f_n(1) = 1$ و روی بازه‌هایی که از $[0,1]$ حذف می‌شوند تا F_n ساخته شود، به‌ترتیب برابر مقادیر $1/2^n$، $2/2^n$، ...، $(2^n - 1)/2^n$ تعریف می‌شود. در نقاط دیگر به‌صورت تکه‌ای خطی تعریف می‌شود. حال تابع کانتور ـ لبگ را برابر $\lim_{n\to\infty} f_n$ تعریف می‌کنیم. تابع کانتور ـ لبگ، پیوسته و صعودی است و برای هر $x \in [0,1] \setminus F$ داریم $f'(x) = 0$. چون F مجموعه‌ای پوچ است، پس f یک a ـ اولیه برای تابع ثابت صفر است. در عین‌حال داریم

$$\int_0^1 f' = 0 \neq f(1) - f(0) = 1.$$

به‌علاوه اگر قرار دهیم $\varphi = \chi_F$، آن‌گاه چون F مجموعه‌ای پوچ است، φ انتگرال‌پذیر است و داریم $\int_0^1 \varphi = 0$. در نتیجه $\Phi(x) = \int_0^x \varphi = 0$ برای هر $x \in [0,1]$. از اینجا نتیجه می‌گیریم $\Phi'(x) = 0$ برای هر x. اما از طرفی داریم $\varphi(x) = 1$ برای هر $x \in F$. پس $\Phi'(x) \neq \varphi(x)$ روی یک مجموعهٔ ناشمارا. به این ترتیب جواب سؤال دوم نیز منفی است.

قضایای همگرایی معمول در نظریهٔ انتگرال‌گیری لبگ عیناً برای انتگرال ریمان تعمیم‌یافته برقرارند. دو نمونه از مشهورترین و پرکاربردترینِ این قضیه‌ها را ذکر می‌کنیم.

قضیه ۱۳.۴.(همگرایی تسلطی) فرض کنید (f_n) دنباله‌ای از توابع انتگرال‌پذیر روی $[a,b]$ باشد و حد دنبالهٔ $(f_n(x))$ برای تقریباً هر x موجود باشد. قرار دهید

$$f(x) = \begin{cases} \lim_{n\to\infty} f_n(x), & \text{در صورت وجود} \\ \circ, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

همچنین، فرض کنید توابع انتگرال‌پذیر f و g موجود باشند به‌طوری که $g(x) \leq f_n(x) \leq h(x)$ برای هر n و $x \in [a,b]$. آن‌گاه f انتگرال‌پذیر است و

$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n.$$

قضیه ۱۴.۴. (همگرایی کراندار) فرض کنید (f_n) دنباله‌ای از توابع انتگرال‌پذیر روی $[a,b]$ باشد و حد دنبالهٔ $(f_n(x))$ برای تقریباً هر x موجود باشد. قرار دهید

$$f(x) = \begin{cases} \lim_{n\to\infty} f_n(x), & \text{در صورت وجود} \\ \circ, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

اگر عدد M موجود باشد که $|f_n(x)| \leq M$ برای هر n و $x \in [a,b]$، آن‌گاه f انتگرال‌پذیر است و

$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n.$$

قضیهٔ زیر که نوعی شرط لازم و کافی برای عبور حد از انتگرال ارائه می‌کند، منسوب به گوردن[۱] است.

قضیه ۱۵.۴. [گوردن، ۱۹۹۰] فرض کنید (f_n) دنباله‌ای از توابع انتگرال‌پذیر روی $[a,b]$ و f حد نقطه‌ای آن باشد. در این صورت

$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n$$

اگر و تنها اگر برای هر $\varepsilon > \circ$، تابع پیمانهٔ δ_ε روی $[a,b]$ یافت شود به‌طوری که برای هر افراز δ_ε ـ ظریف $\mathcal{P}$ عدد طبیعی $k_\circ$ موجود باشد به‌قسمی که برای هر $k \geq k_\circ$،

$$\left| S(f, \dot{\mathcal{P}}) - \int_a^b f_k \right| \leq \varepsilon.$$

یکی دیگر از مزایای انتگرال ریمان تعمیم‌یافته این است که نیاز به بررسی جداگانهٔ انتگرال‌های ناسره (کُشی ـ ریمان) نیست. در واقع قضیهٔ زیر که هایکه[۲] در ۱۹۲۱ برای انتگرال پرون ثابت کرد، نشان می‌دهد چیزی به اسم انتگرال ناسره برای انتگرال ریمان تعمیم‌یافته وجود ندارد.

1) R. A. Gordon 2) H. Heike

قضیه ۱۶.۴. [**هایکه، ۱۹۲۱**] تابع $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ روی $[a,b]$ انتگرال‌پذیر است اگر و تنها اگر عدد حقیقی A موجود باشد به‌طوری که برای هر $c\in(a,b)$، تحدید f به $[a,c]$ انتگرال‌پذیر باشد و

$$\lim_{c\to b^-}\int_a^c f = A$$

در این حالت $A=\int_a^b f$.

مثال ۱۷.۴. تابع $f:[۰,۱]\to\mathbb{R}$ که با $f(x)=\frac{۱}{x^۲}\sin\frac{\pi}{x}$ روی $(۰,۱]$ و $f(۰)=۰$ تعریف می‌شود، انتگرال‌پذیر نیست. در واقع داریم $f(x)=(\frac{۱}{\pi}\cos\frac{\pi}{x})'$ برای هر $x\in[c,۱]$ که $۰<c<۱$. بنابراین

$$\int_c^۱ \frac{۱}{x^۲}\sin\frac{\pi}{x}dx=\frac{۱}{\pi}(\cos\pi-\cos\pi/۴).$$

چون طرف راست هنگامی که $c\to ۰^+$، موجود نیست، پس $\int_۰^۱ \frac{۱}{x^۲}\sin\frac{\pi}{x}dx$ نیز موجود نیست.

هم نظریهٔ ریمان و هم نظریهٔ لبگ برای پرداختن به انتگرال توابع تعریف شده روی بازه‌های بی‌کران نیاز به تعریف مجدد و نوعی فرایند حدی دارند. اما انتگرال ریمان تعمیم‌یافته این نقص را ندارد. در واقع می‌توان تعریفی ارائه کرد که هم برای بازه‌های فشرده و هم بازه‌های بی‌کران قابل استفاده باشد. روش‌های مختلفی برای این کار وجود دارد. تعریف زیر متداول‌ترین آن‌هاست.

در مجموعهٔ اعداد حقیقی گسترش‌یافته، قرارداد می‌کنیم $۰=۰\times\infty=\infty\times۰$. فرض کنید $f:[a,\infty)\to\mathbb{R}$ یک تابع باشد. یک افراز نشان‌دار از $[a,\infty]$ در $\mathbb{R}^*$ عبارت است از

$$\dot{\mathcal{P}}=\{([x_۰,x_۱),t_۱),\cdots,([x_{n-۱},x_n),t_n),([x_n,x_{n+۱}),t_{n+۱})\}$$

که $x_۰=a$ و $x_{n+۱}=\infty$. تعریف می‌کنیم $f(\infty)=۰$. یک پیمانه روی $[a,\infty]$ عبارت است از تابع اکیداً مثبت δ روی $[a,\infty]$. گوییم افراز $\dot{\mathcal{P}}$، δ ـ ظریف است اگر زیربازه‌های کراندار $\dot{\mathcal{P}}$ در شرط

$$[x_{i-۱},x_i]\subset[t_{i-۱}-\delta(t_{i-۱}),t_i+\delta(t_i)]$$

برای هر $i=۱,\dots,n$ صدق کنند و برای بازهٔ نامتناهی $[x_n,\infty]$ داشته باشیم

$$[x_n,\infty]\subset[\frac{۱}{\delta(\infty)},\infty].$$

توجه کنید که δ ـ ظریف بودن $\dot{\mathcal{P}}$ ایجاب می‌کند $t_{n+۱}=\infty$. بنابراین در مجموع ریمانی

$$S(f,\dot{\mathcal{P}})=\sum_{i=۱}^{n}f(t_i)(x_i-x_{i-۱})$$

همهٔ جملات متناهی هستند. اکنون می‌توان تعریف زیر را ارائه کرد.

تعریف ۱۸.۴. فرض کنید $I = [a, \infty)$ و $f : I \to \mathbb{R}$. گوییم f انتگرال‌پذیر ریمان تعمیم‌یافته روی $[a, \infty)$ است هرگاه عدد حقیقی A یافت شود که برای هر $\varepsilon > ۰$ پیمانهٔ δ_ε روی $[a, \infty]$ موجود باشد به‌طوری که اگر $\dot{\mathcal{P}}$ یک افراز δ_ε ـ ظریف باشد، آن‌گاه

$$|S(f, \dot{\mathcal{P}}) - A| < \varepsilon.$$

در این حالت می‌نویسیم $\int_I f = \int_a^\infty f = A$.

با تغییرات مناسبی می‌توان انتگرال را روی بازهٔ $(-\infty, a]$ و به‌طور کلی روی $(-\infty, \infty)$ تعریف کرد. توجه کنید تعریف بالا با تعریفی که قبلاً روی فاصلهٔ فشرده بیان کردیم، سازگار است: کافی است f را خارج از فاصلهٔ فشرده برابر صفر تعریف کنیم. با این گسترش، برخی از قضایای گفته شده برای فاصله‌های فشرده نیاز به بازبینی مجدد دارند. مثلاً قضیهٔ همگرایی یکنواخت دیگر برقرار نیست.

مثال ۱۹.۴. فرض کنید $f_k : [۰, \infty) \to \mathbb{R}$ و $f_k(x) = \frac{۱}{k}\chi_{[۰,k]}$، تابع f_k روی بازهٔ $[۰, \infty)$ انتگرال‌پذیر است و دنبالهٔ تابعی (f_k) همگرای یکنواخت به تابع ثابت صفر است. در عین‌حال داریم $\lim_{k\to\infty} \int_۰^\infty f_k = ۱$ ولی $\int_۰^\infty \lim_{k\to\infty} f_k = ۰$.

سادگی و قدرت نظریهٔ انتگرال هنستاک ـ کورزویل شایستگی آن را دارد که در دوره‌های کارشناسی به‌جای انتگرال ریمان تدریس شود. مراجع [۱]، [۱۱]، [۱۳]، [۱٦] و [۲۰] می‌توانند منابع مناسبی برای این کار باشند.

۵. هم‌ارزی سه نظریه

واقعیت تعجب‌برانگیز این است که سه نظریهٔ انتگرال دانژوا، پرون و هنستاک ـ کورزویل علی‌رغم رویکردهای کاملاً متفاوت، بایکدیگر هم‌ارزند. هم‌ارز بودن انتگرال هنستاک ـ کورزویل و انتگرال پرون که در واقع به‌راحتی از تعریف به‌دست می‌آید، بلافاصله بعد از معرفی انتگرال هنستاک ـ کورزویل معلوم شد.

در سال ۱۹۲۱، هایکه نیز ثابت کرد هر تابع انتگرال‌پذیر دانژوا، انتگرال‌پذیر پرون نیز هست. عکس این مطلب را مستقلاً پی. اس. الکساندروف[1] در ۱۹۲۴ و اچ. لومان[2] در ۱۹۲۵ نشان دادند. بنابراین، قضیهٔ زیر را داریم.

1) P. S. Aleksandrof 2) H. Looman

قضیه ۵.۱. فرض کنید $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تابع باشد. گزاره های زیر هم‌ارزند.

۱ — f انتگرال‌پذیر دانژوا است.

۲ — f انتگرال‌پذیر پرون است.

۳ — f انتگرال‌پذیر هنستاک ـ کورزویل است.

سه نظریهٔ انتگرال مورد بحث، نقطهٔ آغاز متفاوتی را برای تعریف برمی‌گزینند، اما هر سه به قصد بسط و تعمیم قضیه‌های اساسی حسابان و قضیه‌های عبور حد از انتگرال ارائه شده‌اند. این سه نظریه، خانوادهٔ توابع انتگرال‌پذیر را نسبت به انتگرال لبگ گسترده‌تر می‌کنند. هر سه، راه میان‌بری برای رسیدن به نظریه‌ای با قدرتی حداقل در حد نظریهٔ لبگ با پرداخت بهای کمتر را جستجو کرده‌اند. در این بین، نظریهٔ هنستاک ـ کورزویل به‌نظر موفق‌تر است هم به لحاظ سادگی و هم به لحاظ طبیعی بودنِ تعریف آن.

٦. انتگرال مک‌شین

در سال ۱۹۷۳، ادوارد جی. مک‌شین نشان داد که انتگرال لبگ را می‌توان برحسب مجموع‌های ریمانی نیز به‌دست آورد. در واقع با آزاد گذاشتن انتخاب نقاط بینی، دامنهٔ توابع انتگرال‌پذیر از ردهٔ توابع انتگرال‌پذیر به مفهوم هنستاک ـ کورزویل محدودتر می‌شود و آنچه به‌دست می‌آید، انتگرال لبگ است. این روش از این حیث که حداقل روی $\mathbb{R}^n$ نیازی به پروراندن مفهوم اندازه نیست، قابل‌توجه است. وی این رویکرد را در چند مقاله و کتاب که به همین موضوع اختصاص دارد، به‌طور کامل پرورانده است؛ برای مثال [۱۵] و [۱٦] را ببینید.

فرض کنید $I \subseteq \mathbb{R}^*$ بازهٔ بسته (احتمالا بی‌کران) و $f : I \to \mathbb{R}$ یک تابع باشد. در صورت لزوم، f را خارج از I برابر صفر تعریف می‌کنیم و قرار می‌دهیم $f(-\infty) = f(\infty) = ۰$ تا به $\mathbb{R}^*$ گسترش یابد.

تعریف ۱.٦. فرض کنید $I \subseteq \mathbb{R}^*$ بازه‌ای بسته باشد. یک افراز نشان‌دار آزاد[1] از I عبارت است از مجموعهٔ متناهی از زوج‌های مرتب

$$\mathcal{P} = \{(I_i, t_i) : i = ۱, ۲, \dots, n\}$$

به‌طوری که I_iها زیربازه‌های بسته از I هستند، $\bigcup_{i=۱}^{n} I_i = I$ و درون I_iها از یکدیگر مجزاست و $t_i \in I_i$. نقطهٔ t_i را یک نشان وابسته به I_i می‌نامیم.

منظور از مجموع ریمانی تابع $f : I \to \mathbb{R}$ وابسته به افراز نشان‌دار $\dot{\mathcal{P}}$ عبارت است از

$$S(f, \dot{\mathcal{P}}) = \sum_{i=۱}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-۱}).$$

1) free tagged partition

تعریف ۲.۶. فرض کنید $\mathcal{P}=\{(I_i,t_i):i=۱,۲,\dots,n\}$ یک افراز نشان‌دار آزاد از بازهٔ بستهٔ $I\subseteq\mathbb{R}^*$ و δ یک پیمانه روی I باشد. گوییم $\dot{\mathcal{P}}$، δ ـ ظریف است اگر برای هر i داشته باشیم

$$I_i\subseteq(x_{i-۱}-\delta(t_i),x_i+\delta(t_i)).$$

با درنظر داشتن دو تعریف بالا، تعریف انتگرال مک‌شین این چنین است.

تعریف ۳.۶. [**مک‌شین، ۱۹۷۳**]فرض کنید $I\subseteq\mathbb{R}^*$ بازه‌ای بسته و $f:I\to\mathbb{R}$ یک تابع باشد. گوییم f انتگرال‌پذیر مک‌شین روی I است هرگاه عدد حقیقی A موجود باشد به‌طوری که برای هر $\varepsilon>۰$ تابع پیمانه δ_ε روی I یافت شود چنان‌که برای هر افراز نشان‌دار آزاد δ ـ ظریف $\dot{\mathcal{P}}$ از I داشته باشیم $|S(f,\dot{\mathcal{P}})-A|<\varepsilon$.

عدد A را انتگرال مک‌شین f روی I می‌گوییم و با $\int_I f$ نشان می‌دهیم.

از تعریف بالا روشن است که هر تابع انتگرال‌پذیر مک‌شین، انتگرال‌پذیر هنستاک ـ کورزویل نیز هست و این دو انتگرال با یکدیگر برابرند. انتگرال مک‌شین خواص پایه‌ای انتگرال را داراست؛ برای مثال به [۱۱] مراجعه کنید. توابع انتگرال‌پذیر مک‌شین، به‌طور مطلق انتگرال‌پذیرند در حالی‌که توابع انتگرال‌پذیر هنستاک ـ کورزویل این چنین نیستند. این مطلب تفاوت بنیادی انتگرال مک‌شین را با انتگرال هنستاک ـ کورزویل نشان می‌دهد. با توجه به این نکته، به‌راحتی می‌توان تابعی ساخت که انتگرال‌پذیر هنستاک ـ کورزویل باشد ولی انتگرال‌پذیر مک‌شین نباشد.

مثال ۴.۶. فرض کنید $f:[۰,۱]\to\mathbb{R}$، $f(۰)=۰$ و $f(x)=۲x\cos\frac{\pi}{x^۲}+\frac{۲\pi}{x}\sin\frac{\pi}{x^۲}$ برای $۰<x\leq ۱$. تابع f انتگرال‌پذیر هنستاک ـ کورزویل است در حالی‌که انتگرال‌پذیر مک‌شین نیست.

قضیهٔ زیر رابطهٔ انتگرال مک‌شین و انتگرال هنستاک ـ کورزویل را بیان می‌کند.

قضیه ۵.۶. تابع $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ انتگرال‌پذیر مک‌شین است اگر و تنها اگر انتگرال‌پذیر مطلق هنستاک ـ کورزویل باشد.

بر اساس تعریف انتگرال مک‌شین می‌توان بسیاری از قضایای همگرایی و صورت‌های مختلف قضیهٔ اساسی حسابان را با کلیتی در حد نظریهٔ لبگ، مستقیماً اثبات کرد. اما این مطلب عجیبی نیست، زیرا می‌توان نشان داد هر تابع انتگرال‌پذیر مک‌شین، انتگرال‌پذیر لبگ نیز هست و برعکس. به‌علاوه، مقدار این دو انتگرال با یکدیگر برابر است.

سپاسگزاری: از داوران محترم که نکات سودمندی را متذکر شدند، سپاسگزاری می‌کنیم.

مراجع

[1] R. G. Bartle, *"A modern theory of integration"*, Amer. Math. Soc., GSM Vol. 32, Rhode Island, 2001.

[2] A. Denjoy, " Une extension de l'intégrale de M. Lebesgue", *Compt. Rend.*, **154**(1912), 859-862.

[3] A. Denjoy, "Calcul de la primitive de la fonction dérivée la plus générale", *Compt. Rend.*, **154**(1912), 1075-1078.

[4] A. Denjoy, "Mémoire sur la totalisation des nombres dérivés non sommables", *Ann. Ecole. Norm. Sup.*, **33**(1916), 127-222.

[5] R. A. Gordon, *"The integrals of Lebesgue, Denjoy, Perron, and Henstock"*, Amer. Math. Soc. GSM Vol.4, Rhode Island, 1994.

[6] R. Henstock, "A new descriptive definition of the Ward integral", *J. London. Math. Soc.*, **35**(1960), 43-48.

[7] R. Henstock, "The equivalence of generalized forms of the Ward, variational, Denjoy-Stieltjes and Perron-Stieltjes integral", *Proc. London Math. Soc.*, **10**(1960), 281-303.

[8] R. Henstock, "Definition of Riemann type of the variational integrals", *Proc. London. Math. Soc.*, **11**(1961), 402-418.

[9] R. Henstock, "N-variation and N-variational integrals of set functions", *Proc. London. Math. Soc.*, **11**(1961), 109-133.

[10] R. Henstock, *The theory of integration*, Butterworths, London, 1963.

[11] D. S. Kurtz and C. Swartz, *The theories of integration*, World Scientific, Singapore, 2004.

[12] J. Kurzweil, "Generalized ordinary differential equations and continuous dependence on a parameter", *Czech. Math. J.*, **82**(1957), 418-449.

[13] P. Lee and R. Vyborny, *The integral: an easy approach after Henstock and Kurzweil*, Cambridge University Press, Cambridge, 2000.

[14] R. M. McLeod, *The generalized Riemann integral*, Amer. Math. Soc., Rhode Island, 1980.

[15] E. J. McShane, "A unified theory of integration", *Amer. Math. Monthly*, **80**(1973), 349-359.

[16] E. J. McShane, *Unified integration*, Academic Press, New York, 1983.

[17] O. Perron, "Über den Integralbegriff", *Sitzber Heidelberg. Akad. Wiss. Abt.*, **16** (1914), 1-16.

[18] I. N. Pesin, *Classical and modern integration theories*, Academic Press, New York, 1970.

[19] J. P. Pier, *Histoire de l'intégration*, Masson, Paris, 1996.

[20] C. Swartz, *Introduction to gauge integrals*, World Scientific, Singapore, 2001.

سعید مقصودی
دانشگاه زنجان، گروه ریاضی
s_maghsodi@znu.ac.ir