

حاصل ضرب تصادفی ماتریس‌ها

حسام‌الدین رجب‌زاده اصطهباناتی✉، زهرا رشادت، میثم نصیری

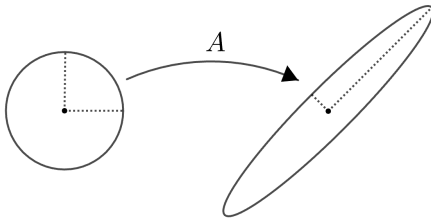
چکیده. در این مقاله به مطالعه حاصل ضرب ماتریس‌های دو در دو از دو منظر هندسی و احتمالاتی می‌پردازیم که در این میان مفهوم رشد نقش کلیدی دارد. با یافتن روابطی بین رفتار ضربی ماتریس‌ها و ترکیب طولی‌های هندسه هذلولوی، اثبات‌هایی جدید از بعضی از قضیه‌های کلاسیک ارائه می‌کنیم.

۱ مقدمه

در بسیاری از پدیده‌های طبیعی، تکرار زیاد یک تغییر کوچک منجر به تغییرات شگرف می‌شود. مشاهده این مهم منشأ بسیاری از مطالعات و نتایج بنیادی در علوم بوده است. انعکاس این رویکرد در ریاضیات نیز منجر به شکل‌گیری نظریات و مفاهیم متنوعی شده است. از اواخر قرن نوزدهم میلادی که مطالعات کیفی معادلات دیفرانسیل آغاز گردید، به تدریج شاخه‌ای در ریاضیات به نام سیستم‌های دینامیکی^۱ سامان یافت. این شاخه از اواسط قرن بیستم میلادی گسترده‌تر شد و با حوزه‌های متنوعی از ریاضیات همچون توپولوژی، هندسه، آنالیز، احتمال، جبر، و نظریه اعداد ارتباط‌های عمیقی پیدا کرد. در این مقاله به جنبه‌هایی از مفهوم «رشد» می‌پردازیم، که از مهم‌ترین و پربسامدترین مباحث در سیستم‌های دینامیکی است.

عبارات و کلمات کلیدی: دستگاه‌های دینامیکی، هندسه هذلولوی، دستگاه‌های خطی، رشد، حاصل ضرب تصادفی ماتریس‌ها، نماهای لیاپونف
نوع مقاله: پژوهشی؛ تاریخ دریافت: ۱۴۰۳/۳/۳؛ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۶/۲۸

1. dynamical systems



شکل ۱

از جمله ابتدایی‌ترین مثال‌ها برای مفهوم رشد می‌توان به مثال‌هایی در درس جبر خطی اشاره کرد. هر ماتریس 2×2 با درایه‌های حقیقی مثل A به‌طور طبیعی روی نقاط \mathbb{R}^2 ، صفحهٔ اقلیدسی دوبعدی، اثر می‌کند و هر نقطه را به نقطهٔ جدیدی تصویر می‌کند. اگر این ماتریس وارون‌پذیر باشد، تصویر نقاط یک

دایره تحت اثر آن، یک بیضی^۱ تشکیل می‌دهد (شکل ۱). حال اگر بار دیگر ماتریس A را روی نقاط این بیضی اثر دهیم، بیضی جدیدی به دست می‌آید و به‌همین ترتیب با اثر دادن متوالی ماتریس A به دنباله‌ای از بیضی‌ها می‌رسیم.

چند سؤال طبیعی در مورد این دنباله از بیضی‌ها می‌توان مطرح نمود:

- مساحت این دنباله از بیضی‌ها چه رفتاری دارد؟
- قطرهای بزرگ و کوچک این دنباله از بیضی‌ها چه رفتاری دارد؟
- نسبت قطر بزرگ به قطر کوچک این دنباله از بیضی‌ها چه رفتاری دارد؟

آیا مقادیر بالا به عدد خاصی نزدیک می‌شوند یا به بی‌نهایت میل می‌کنند؟ در مورد نرخ همگرایی چه می‌توان گفت؟ سؤالات بالا و مشابه آن را می‌توان نه تنها در مورد ماتریس‌های دوبعدی، بلکه در هر بُعد $n \geq 2$ نیز مطرح کرد. پاسخ اولین سؤال بالا به دترمینان ماتریس A وابسته است. می‌دانیم قدر مطلق دترمینان یک ماتریس 2×2 برابر ضریب تبدیل مساحت اشکال صفحه تحت اثر آن ماتریس است. پس مساحت n امین بیضی برابر $|\det A|^n \pi r^2$ است که در آن r شعاع دایرهٔ اولیه را نمایش می‌دهد. به‌وضوح اگر $|\det A| = 1$ مساحت همهٔ بیضی‌ها یکسان، و اگر $|\det A|$ عددی بیشتر از ۱ (به ترتیب کمتر از ۱) باشد، مساحت دنبالهٔ بیضی‌ها به‌طور نمایی به بی‌نهایت (به ترتیب به صفر) میل خواهد کرد.

برای پاسخ دادن به دیگر سؤالات بالا لازم است مفاهیمی از جبر خطی و عمل ماتریس‌ها را یادآوری و نمادهایی وضع کنیم. این کار را در بخش بعد انجام خواهیم داد. سپس در بخش ۳ به انواع رشد و نقش آن در رده‌بندی ماتریس‌ها و دستگاه‌های خطی می‌پردازیم و پدیده‌هایی پایدار در دستگاه‌های دینامیکی را که بر مبنای رشد تعریف می‌شوند مطالعه می‌کنیم. در بخش ۴ به رشد در دستگاه‌های خطی از منظر احتمالاتی می‌پردازیم و مفهوم نمای لیاپونف را، که از محوری‌ترین مفاهیم

۱. ماتریس A متناظر با یک دوران در صفحه است، اگر و تنها اگر این بیضی یک دایره باشد.

در شناخت دستگاه‌های دینامیکی خطی و هموار است، تعریف می‌کنیم.

در بخش ۴ به بیان قضیه‌های اصلی و ذکر مثال‌هایی در مورد آن‌ها اکتفا شده است و اثبات‌های بعضی از قضیه‌های اصلی به بخش ۶ موکول شده است. هرچند اثبات‌های متنوعی برای این قضیه‌ها وجود دارد، در این نوشته به اثبات‌هایی در حالت دستگاه‌های خطی دو بُعدی خود را محدود کرده‌ایم که در آن‌ها ارتباط جالب ماتریس‌های عضو $SL(2, \mathbb{R})$ با طولپایی‌های صفحه هذلولوی نقش اصلی را ایفا می‌کند. برای انسجام این نوشته و به منظور یادآوری، در بخش ۵ به مرور بعضی مفاهیم از هندسه هذلولوی، که در اثبات قضیه‌های اصلی به کار می‌رود، پرداخته‌ایم. به‌طور خاص، به عمل‌گروه ضربی $SL(2, \mathbb{R})$ به‌عنوان طولپایی‌های صفحه هذلولوی تأکید می‌کنیم و نشان می‌دهیم که بسیاری از ویژگی‌های دستگاه‌های خطی دو بُعدی به این زبان قابل ترجمه است. این بخش مقدمات لازم برای اثبات قضیه‌های اصلی در بخش ۶ را فراهم می‌کند. در پایان، در بخش ۶ به اثبات قضیه‌های اصلی بخش‌های قبلی می‌پردازیم.

۲ مقدمات

۱.۲ مفاهیمی از جبر خطی

برای هر $v = (v_1, \dots, v_d) \in \mathbb{R}^d$ ، نُرم v را به‌صورت $|v| := (v_1^2 + \dots + v_d^2)^{1/2}$ تعریف می‌کنیم. با توجه به تناظر \mathbb{C} و \mathbb{R}^2 ، قدر مطلق اعضای \mathbb{C} نیز به‌صورت مشابه تعریف می‌شود و از همین نماد برای آن استفاده می‌کنیم. مجموعه همه ماتریس‌های $d \times d$ با ضرایب حقیقی را با $M_d(\mathbb{R})$ نمایش می‌دهیم و منظور از $GL(d, \mathbb{R})$ و $SL(d, \mathbb{R})$ به ترتیب مجموعه اعضای وارون‌پذیر و اعضای با دترمینان واحد از $M_d(\mathbb{R})$ است. با استفاده از نُرم $|\cdot|$ روی بردارها، برای هر $A \in M_d(\mathbb{R})$ ، نُرم عملگری به‌صورت زیر تعریف می‌شود و از نماد $\|\cdot\|$ برای نمایش این نُرم استفاده می‌کنیم.

$$\|A\| := \max \{ |Av| : v \in \mathbb{R}^d, |v| = 1 \}. \quad (۱.۲)$$

به‌سادگی از تعریف بالا دیده می‌شود که برای هر $v \in \mathbb{R}^d$ ، $|Av| \leq \|A\| |v|$. همچنین می‌توان بررسی کرد که $\|\cdot\|$ یک نُرم روی $M_d(\mathbb{R})$ تعریف می‌کند که خاصیت زیر ضربی دارد

$$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|, \quad \|rA\| = |r| \|A\|, \quad (۲.۲)$$

$$\|AB\| \leq \|A\| \|B\|, \quad (۳.۲)$$

در این مقاله همه‌جا فاصلهٔ القاشده از $\|\cdot\|$ را روی ماتریس‌ها در نظر می‌گیریم. خواننده می‌تواند مسئلهٔ زیر را تمرینی دربارهٔ خواص نرم گفته‌شده در نظر بگیرد.

مسئله ۱. (الف) برای هر $A \in \text{SL}(2, \mathbb{R})$ نشان دهید $\|A\| = \|A^{-1}\|$.

(ب) اگر برای $t \in \mathbb{R}^+$ تعریف کنیم $R_t := \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix}$ ، $D_t := \begin{bmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{bmatrix}$ ، و $U_t := \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ثابت کنید

$$\|R_t\| = 1, \quad \|D_t\| = \max\{t, t^{-1}\}, \quad \|U_t\| = \sqrt{\frac{t^2 + t\sqrt{t^2 + 4} + 4}{2}}.$$

(پ) دو ماتریس $A, B \in M_d(\mathbb{R})$ را مزدوج گویند اگر $P \in \text{GL}(d, \mathbb{R})$ موجود باشد که $A = P^{-1}BP$. آیا دو ماتریس مزدوج نرم برابر دارند؟

برای هر ماتریس مربعی با درایه‌های حقیقی منظور از شعاع طیفی، که آن را با ρ نمایش می‌دهند، ماکسیم قدرمطلق مقادیر ویژهٔ آن ماتریس است. درواقع اگر $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_d$ مقادیر ویژهٔ ماتریس $A \in M_d(\mathbb{R})$ باشند^۱

$$\rho(A) := \max\{|\lambda_1|, \dots, |\lambda_d|\}. \quad (۴.۲)$$

یک ویژگی مهم از شعاع طیفی که فرمول حدی گلفاند^۲ نامیده می‌شود، روشن می‌کند که شعاع طیفی درواقع نرخ رشد نمایی نرم توان‌های ماتریس است:

$$\rho(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|A^n\|^{1/n}. \quad (۵.۲)$$

مشاهدهٔ اینکه اساساً چرا چنین حدی وجود دارد، بسیار آموزنده است. نابرابری (۳.۲) نشان می‌دهد که دنبالهٔ $\ln \|A^n\| := a_n$ در رابطهٔ زیرجمعی صدق می‌کند. دنبالهٔ $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ از اعداد حقیقی را زیرجمعی^۳ می‌گویند اگر برای هر $m, n \in \mathbb{N}$ ، $a_{n+m} \leq a_n + a_m$. لم ساده‌ای (لم (۴.۳) برای دنباله‌های زیرجمعی، فوراً وجود حد در (۵.۲) را نتیجه می‌دهد. ایدهٔ کلی این اثبات ساده در بسیاری از نتایج عمیق و مهم در رفتارهای حدی در سیستم‌های دینامیکی نیز به کار می‌رود که در ادامهٔ این مقاله مواردی از این دست خواهد آمد.

۱. λ_i ‌ها می‌توانند حقیقی یا مختلط باشند.

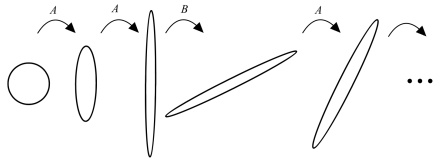
مسئله ۲. (الف) ثابت کنید برای هر ماتریس $A \in M_d(\mathbb{R})$ ، $\rho(A) \leq \|A\|$. با ارائه مثالی از یک ماتریس $A \in SL(2, \mathbb{R})$ و $v \in \mathbb{R}^2$ ، نشان دهید که نابرابری $|Av| \leq \rho(A)|v|$ در حالت کلی برقرار نیست.

(ب) ثابت کنید اگر برای $A, B \in M_d(\mathbb{R})$ ، تساوی $AB = BA$ برقرار باشد، آنگاه $\rho(AB) \leq \rho(A)\rho(B)$ و $\rho(A+B) \leq \rho(A) + \rho(B)$. با ارائه مثال نقضی از ماتریس‌های وارون‌پذیر 2×2 نشان دهید ρ در حالت کلی خاصیت زیرضربی یا زیرجمعی ندارد.

حال فرض کنید به جای ماتریس A دنباله‌ای از ماتریس‌ها مانند $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ داده شده است و بخواهیم رفتار حدی دنباله حاصل ضرب آن‌ها $A_1 A_2 \dots A_n$ را مطالعه کنیم. این مسئله با این کلیت پاسخ ساده‌ای ندارد. برای فهم بهتر پیچیدگی آن به حاصل ضرب تصادفی ماتریس‌ها می‌پردازیم.

۲.۲ حاصل ضرب تصادفی ماتریس‌ها

فرض کنید دو ماتریس $A, B \in GL(2, \mathbb{R})$ و یک سکه سالم^۱ در اختیار داریم! این بار هم با دایره‌ای در صفحه شروع می‌کنیم و دنباله‌ای از بیضی‌ها را به صورت تصادفی با این قاعده می‌سازیم که هر بار سکه را به صورت مستقل از هم پرتاب می‌کنیم. اگر نتیجه پرتاب سکه شیر



شکل ۲

بود، با اثر دادن ماتریس A روی بیضی قبلی، یک بیضی جدید می‌سازیم و اگر نتیجه پرتاب سکه خط بود با اثر دادن ماتریس B بیضی جدید را از روی بیضی قبلی تولید می‌کنیم. به این ترتیب متناظر با نتیجه پرتاب‌های سکه دنباله‌ای تصادفی از A, B می‌سازیم و می‌توانیم مشابه سؤالات مطرح شده در ابتدای مقاله را در مورد حاصل ضرب‌های متناهی حاصل از این دنباله مطرح کنیم. خواهیم دید که می‌توانیم در مورد «بیشتر» چنین دنباله‌هایی (و نه همه آن‌ها) به این سؤالات پاسخ دهیم!

به طور دقیق‌تر، می‌توان فضای همه دنباله‌های نامتناهی از A, B یعنی $\{A, B\}^{\mathbb{N}}$ را به اندازه احتمالی با عنوان اندازه احتمال برنولی وابسته به وزن‌دهی برابر به A, B مجهز کرد. آنگاه اصطلاح «بیشتر دنباله‌ها» به معنی دقیق، اعضای یک پیشامد با احتمال ۱ از این فضای احتمال است.

مطالعه نظام‌مند این سؤالات ذیل مطالعه رده مهمی از سیستم‌های دینامیکی قرار می‌گیرد که دستگاه‌های خطی نامیده می‌شوند.

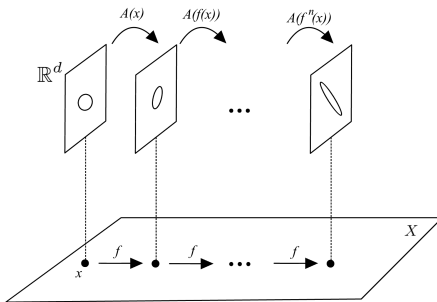
۱. منظور از سکه سالم سکه‌ای است که احتمال ظاهر شدن شیر یا خط در پرتاب آن یکسان باشد.

۳.۲ دستگاه‌های خطی

تعریف ۱.۲. فرض کنید X یک فضای متریک فشرده و $f : X \rightarrow X$ تابعی پیوسته باشد. همچنین فرض کنید $A : X \rightarrow M_d(\mathbb{R})$ نگاشتی پیوسته باشد که به هر عضو X تبدیلی خطی از فضای اقلیدسی d بُعدی نسبت دهد. در این صورت f و A در کنار هم به صورت زیر به طور طبیعی نگاشتی روی $X \times \mathbb{R}^d$ تعریف می‌کنند

$$F(x, v) := (f(x), A(x)v).$$

در این حالت به F یا زوج (f, A) یک دستگاه خطی^۱ و به f دینامیک پایه^۲ این دستگاه خطی گفته می‌شود.



شکل ۳

اگر برای $n, n \in \mathbb{N}$ بار ترکیب تابع F با خودش را با F^n نمایش دهیم، برای هر $(x, v) \in X \times \mathbb{R}^d$

$$F^n(x, v) = (f^n(x), A_n(x)v)$$

که در آن $A_n(x)$ برابر است با

$$A(f^{n-1}(x)) \cdots A(f(x))A(x)$$

و $f^n = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_n$ در واقع تحت اثر تابع

f با حاصل ضرب‌های دنباله‌ی زیر از ماتریس‌ها روبه‌رو هستیم

$$A(x), A(f(x)), A(f^2(x)), \dots$$

توجه کنید که اگر همه ماتریس‌های $A(x)$ وارون‌پذیر باشند و دینامیک پایه $f : X \rightarrow X$ یک همسان‌ریختی باشد، F نیز یک همسان‌ریختی خواهد بود و می‌توانیم دستگاه خطی را در جهت منفی نیز تعریف کنیم:

$$A_{-n}(x) = A^{-1}(f^{-n}(x)) \cdots A^{-1}(f^{-1}(x))$$

۱. در بسیاری از متون سیستم‌های دینامیکی از دستگاه‌های خطی با عنوان linear cocycle نام برده می‌شود.

که در آن منظور از f^{-j} وارون تابع f^j است.

و سؤال مورد علاقه در این زمینه این است که دنباله $\{A_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ برای نقطه‌های مختلف x چه رفتاری دارد؟ مشخص‌تر اینکه می‌توان پرسید:

سؤال ۱. برای نقاط مختلف $x \in X$ ، رشد دنباله $\{\|A_n(x)\|\}_{n \in \mathbb{N}}$ چگونه است؟ آیا دنباله‌های وابسته به نقاط مختلف رشد یکسانی دارند؟

مثال زیر نشان می‌دهد که این تعریف کلی از دستگاه‌های خطی و مطالعه آن، بررسی رفتار توان‌های یک ماتریس ثابت را به عنوان حالت خاصی در بر دارد.

مثال ۲.۲. اگر $A : X \rightarrow M_d(\mathbb{R})$ تابعی ثابت باشد، برای مثال $A(x) = A_0$ که در آن A_0 یک ماتریس ثابت $d \times d$ باشد، $A_n(x) = A_0^n$ و بنابراین $A_n(x)$ مستقل از انتخاب نقطه x خواهد بود و مطالعه رفتار $A_n(x)$ در اصل همان مطالعه رفتار توان‌های ماتریس A_0 است.

مثال بعدی یکی از مهم‌ترین مثال‌های دستگاه‌های خطی است که زبان مناسبی برای مطالعه حاصل ضرب تصادفی ماتریس‌ها فراهم می‌کند.

مثال ۳.۲. برای $k \in \mathbb{N}$ ، Σ_k را مجموعه همه دنباله‌های نامتناهی از اعداد $\{1, 2, \dots, k\}$ بگیرید.

$$\Sigma_k := \{(\ell_0, \ell_1, \ell_2, \dots) : \ell_i = 1, 2, \dots, k\}.$$

می‌توان متریک مناسبی روی Σ_k تعریف کرد که توپولوژی حاصل از آن همان توپولوژی حاصل ضربی به دست آمده از توپولوژی گسسته روی $\{1, 2, \dots, k\}$ باشد و بنابراین Σ_k به یک فضای متریک فشرده تبدیل شود.

تابع $\sigma : \Sigma_k \rightarrow \Sigma_k$ که هر عضو مانند $(\ell_0, \ell_1, \dots) \in \Sigma$ را با یک واحد تغییر جا^۱ به سمت چپ (و حذف اولین عضو) به (ℓ_1, ℓ_2, \dots) می‌نگارد، یک تابع پیوسته و پوشا روی Σ_k تعریف می‌کند. حال به هر مجموعه k عضوی $A = \{A_1, A_2, \dots, A_k\} \subset M_d(\mathbb{R})$ ، نگاشت $A : \Sigma_k \rightarrow M_d(\mathbb{R})$ را که با ضابطه

$$A(\ell_0, \ell_1, \dots) = A_{\ell_0}$$

حاصل ضرب تصادفی ماتریس‌ها/رجب‌زاده، رشادت، نصیری

تعریف می‌شود نسبت می‌دهیم. با این تعریف، برای هر $x = (\ell_0, \ell_1, \dots) \in \Sigma_k$ و هر $n \in \mathbb{N}$ ، $A_n(x) = A_{\ell_{n-1}} \cdots A_{\ell_1} A_{\ell_0}$ و بنابراین مطالعه رفتار $A_n(x)$ برای نقاط مختلف $x \in \Sigma_k$ معادل مطالعه حاصل ضرب‌های حاصل از دنباله‌های مختلف در A است.

مثال ۴.۲. فرض کنید $\mathbb{T}^2 := \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2$ چنبرهٔ دوبعدی و $f: \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ یک تابع هموار باشد. در این صورت برای هر $x \in \mathbb{T}^2$ مشتق f در نقطهٔ x را می‌توان به‌طور طبیعی با یک ماتریس 2×2 توصیف کرد که آن را با $Df(x)$ نمایش می‌دهیم. به کمک تابع $Df: \mathbb{T}^2 \rightarrow M_2(\mathbb{R})$ یک دستگاه خطی دوبعدی روی f تعریف می‌شود که به آن دستگاه خطی مشتق^۱ می‌گویند.

هرچند مثال ۴.۲ برای نگاشتی هموار روی یک خمینهٔ خاص، یعنی چنبرهٔ دوبعدی بیان شد، اما تعریف دستگاه خطی مشتق محدود به این مثال خاص نیست و برای هر نگاشت هموار روی خمینه‌های هموار قابل تعریف است. تعریف دقیق این مفهوم در حالت کلی نیازمند استفاده از مفاهیمی مثل کلاف‌های برداری^۲ و نگاشت‌های بین این کلاف‌ها است که در این مقاله به آن نمی‌پردازیم. برای مطالعه بیشتر در این باره به [۱۲] رجوع کنید.

۳ مفهوم رشد و انواع رفتارهای دینامیکی

تقسیم‌بندی سه‌گانهٔ هذلولوی، بیضوی، و سهموی در موضوعات متنوعی از ریاضیات وجود دارد. در فضای ماتریس‌ها نیز این تقسیم‌بندی مطرح است که بیانی برحسب مقادیر ویژه دارد. در این بخش سعی می‌کنیم این مفاهیم را براساس مفهوم رشد بیان کنیم که قابل تعمیم به دستگاه‌های خطی کلی باشد.

۱.۳ انواع مفهوم رشد برای دنباله‌ها

دنبالهٔ $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ از اعداد حقیقی مثبت را در نظر بگیرید. به‌طور کلی رشد یک دنباله مبین نحوهٔ بزرگ‌شدن مقادیر a_n است وقتی n به بی‌نهایت میل می‌کند. در اینجا انواع مختلفی از رشد را معرفی می‌کنیم.

دنبالهٔ $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ را دارای رشد نمایی^۳ (یا رشد حداقل نمایی) گوئیم، اگر اعداد حقیقی $0 < C < \lambda$ و $n \in \mathbb{N}$ موجود باشد که برای هر $n \in \mathbb{N}$

$$a_n > C\lambda^n.$$

تعریف بالا معادل این است که $\liminf_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$ عددی مثبت یا $+\infty$ باشد. برای مثال دنباله‌های $\{3^n - 2^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ و $\{n!\}_{n \in \mathbb{N}}$ رشد نمایی دارند ولی دنباله‌های $\{2^{\sqrt{n}}\}_{n \in \mathbb{N}}$ و $\{(1 + \frac{1}{n})^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ رشد نمایی ندارند.

به‌همین ترتیب دنباله $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ را دارای رشد حداکثر چندجمله‌ای^۱ گوئیم اگر چندجمله‌ای $P(x)$ با ضرایب حقیقی موجود باشد که برای هر $n \in \mathbb{N}$ ، $a_n < P(n)$. این تعریف معادل با وجود اعداد $C, \alpha > 0$ است که برای هر $n \in \mathbb{N}$ ، $a_n \leq Cn^\alpha$. برای مثال دنباله‌های $\{\ln(n!)\}_{n \in \mathbb{N}}$ و $\{\sqrt{n^2 + 1}\}_{n \in \mathbb{N}}$ رشد حداکثر چندجمله‌ای دارند ولی دنباله $\{2^{\sqrt{n}}\}_{n \in \mathbb{N}}$ رشد حداکثر چندجمله‌ای ندارد.

دنباله‌های کران‌دار و دنباله‌های با رشد خطی در دسته دنباله‌های با رشد حداکثر چندجمله‌ای قرار می‌گیرند. یادآوری می‌کنیم که دنباله $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ را کران‌دار گوئیم، اگر عدد حقیقی مثبت C موجود باشد که برای هر $n \in \mathbb{N}$ ، $a_n \leq C$. به‌همین ترتیب این دنباله را دارای رشد خطی گوئیم اگر $K_1, K_2, C \in \mathbb{R}$ موجود باشند که $0 < K_1, K_2$ و برای هر $n \in \mathbb{N}$ ، $K_1 n + C < a_n < K_2 n + C$. برای مثال دنباله‌های $\{\sqrt[n]{n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ و $\{\ln(n+1) - \ln(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ کران‌دار هستند، درحالی‌که دنباله‌های $\{\sqrt[n]{n^n + 1}\}_{n \in \mathbb{N}}$ و $\{n + \ln n\}_{n \in \mathbb{N}}$ رشد خطی دارند. مثال‌هایی از انواع رشد در مورد نرم توان‌های یک ماتریس هم وجود دارد.

مثال ۱.۳. برای ماتریس‌های $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ، $C = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix}$ که در آن $t \in \mathbb{R}$ ، دنباله‌های $\{\|A^n\|\}_{n \in \mathbb{N}}$ و $\{\|B^n\|\}_{n \in \mathbb{N}}$ به ترتیب رشد نمایی و رشد خطی دارند، و دنباله $\{\|C^n\|\}_{n \in \mathbb{N}}$ کران‌دار است.

مسئله ۳. برای هر دو ماتریس مربعی A, B با درایه‌های حقیقی که با هم مزدوج هستند، اگر دنباله $\{\|A^n\|\}_{n \in \mathbb{N}}$ رشد حداقل نمایی یا حداکثر چندجمله‌ای داشته باشد، رشد دنباله $\{\|B^n\|\}_{n \in \mathbb{N}}$ نیز مشابه است. همچنین $\{\|A^n\|\}_{n \in \mathbb{N}}$ کران‌دار است اگر و تنها اگر $\{\|B^n\|\}_{n \in \mathbb{N}}$ کران‌دار باشد.

می‌توان به بسیاری از دنباله‌ها با رشد حداقل نمایی که در پدیده‌های مختلف سیستم‌های دینامیکی یا شاخه‌های دیگر ریاضیات ظاهر می‌شوند عددی به‌عنوان نرخ رشد نسبت داد که به‌طور کمی رشد نمایی دنباله را توصیف کند.

حاصل ضرب تصادفی ماتریس‌ها/رجب‌زاده، رشادت، نصیری

تعریف ۲.۳. منظور از نرخ رشد نمایی دنباله $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ از اعداد حقیقی مثبت، مقدار حد $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln a_n$ در صورت وجود است.

ملاحظه ۳.۳. برای دنباله $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ از اعداد حقیقی مثبت مقادیر مثبت $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln a_n$ و $\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln a_n$ کران‌های بالا و پایینی برای نرخ رشد هستند. بنابراین اگر تعریف کنیم $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln a_n = \lambda \in \mathbb{R}$ ، می‌گوییم نرخ رشد نمایی دنباله حداکثر λ است، حتی در صورتی که حد $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln a_n$ وجود نداشته باشد.

لم ساده زیر بیان می‌کند که تحت شرایطی حد مربوط به نرخ رشد نمایی دنباله‌ها وجود دارد. شرایط این لم در بسیاری از مثال‌های متنوع در ریاضیات و به‌خصوص سیستم‌های دینامیکی برقرار می‌شود. دنباله $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ از اعداد حقیقی مثبت را به ترتیب زیرضربی^۱ و زیرجمعی^۱ گوئیم اگر برای هر $m, n \in \mathbb{N}$ نابرابری‌های $a_{m+n} \leq a_m + a_n$ و $a_{m+n} \leq a_m a_n$ برقرار باشد. به‌وضوح اگر دنباله $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ زیرضربی باشد، دنباله $\{\ln a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ زیرجمعی است.

لم ۴.۳. اگر $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ دنباله‌ای زیرجمعی از اعداد حقیقی مثبت باشد،

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} b_n = \inf \left\{ \frac{1}{n} b_n : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

از لم بالا نتیجه می‌شود که دنباله‌های زیرضربی نرخ حداکثر نمایی دارند و به‌علاوه برای هر دنباله زیرضربی حد مربوط به نرخ رشد نمایی تعریف می‌شود. مسئله زیر کاربردی ساده از لم بالا است که تضمین می‌کند حد مربوط به فرمول گلفاند برای شعاع طیفی وجود دارد.

مسئله ۴. ثابت کنید برای هر ماتریس مربعی A ، $\{\|A^n\|\}_{n \in \mathbb{N}}$ یک دنباله زیرضربی است و نتیجه بگیرید $\lim_{n \rightarrow \infty} \|A^n\|^{1/n}$ وجود دارد. با این حال در مثال ۳.۲ برای $d = 2$ ، k ، مجموعه A را به‌گونه‌ای تعیین کنید که برای بی‌نهایت $x \in \Sigma_2$ ، $\lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n(x)\|^{1/n}$ وجود نداشته باشد.

به دنباله‌هایی که نرخ رشد نمایی آن‌ها برابر صفر است دنباله‌های با رشد زیرنمایی^۲ گفته می‌شود. به‌سادگی دیده می‌شود که هر دنباله با نرخ رشد حداکثر چندجمله‌ای رشد زیرنمایی دارد، اما عکس این موضوع درست نیست. برای مثال دنباله $\{2^{\sqrt{n}}\}_{n \in \mathbb{N}}$ رشد زیرنمایی دارد ولی نرخ رشد حداکثر چندجمله‌ای ندارد. به دنباله‌های این‌چنینی که نرخ رشد حداکثر چندجمله‌ای ندارند ولی نرخ رشد نمایی آن‌ها برابر صفر است، دنباله‌های با رشد میانی^۳ گفته می‌شود.

مسئله ۵. نشان دهید برای هر ماتریس مربعی A با درایه‌های حقیقی دنباله $\{\|A^n\|\}_{n \in \mathbb{N}}$ نمی‌تواند رشد میانی داشته باشد. باین‌حال در مثال ۳.۲ برای $k, d = 2$ ، مجموعه A را به‌گونه‌ای تعیین کنید که برای بی‌نهایت $x \in \Sigma_2$ ، دنباله $\{\|A_n(x)\|\}_{n \in \mathbb{N}}$ رشد میانی داشته باشد.

۲.۳ انواع رشد در ماتریس‌ها

در بخش‌های قبلاً مثال‌هایی متنوع از انواع مختلف رشد نرم توان‌های یک ماتریس را مشاهده کردیم. نحوه‌های مختلف رشد نرم می‌تواند روش معادلی برای تقسیم‌بندی ماتریس‌ها به سه‌گانه هذلولوی، سهموی، و بیضوی برای اعضای $SL(2, \mathbb{R})$ به دست دهد.

یک ماتریس مربعی با درایه‌های حقیقی را هذلولوی گویند اگر هیچ مقدار ویژه‌ای با قدرمطلق واحد نداشته باشد، در مقابل آن را بیضوی گویند اگر همه مقادیر ویژه آن غیرحقیقی باشند و قدرمطلق واحد داشته باشند.

با توجه به اینکه برای $A \in SL(2, \mathbb{R})$ چندجمله‌ای مشخصه A برابر $z^2 - \text{tr}(A)z + 1$ است، وضعیت‌های مقادیر ویژه A برحسب $\text{tr}(A)$ رده‌بندی می‌شود. درواقع اگر مقادیر ویژه را λ_1, λ_2 بنامیم که $|\lambda_1| \leq |\lambda_2|$

• اگر $|\text{tr}(A)| < 2$ ، $\lambda_1 = \lambda_2^{-1} \in \mathbb{R}$ و $|\lambda_1| < 1 < |\lambda_2|$ ؛

• اگر $|\text{tr}(A)| > 2$ ، $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2 \notin \mathbb{R}$ و $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$ ؛

• اگر $|\text{tr}(A)| = 2$ ، $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ یا $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$.

تقسیم‌بندی بالا نشان می‌دهد که ماتریس $A \in SL(2, \mathbb{R})$ هذلولوی است، اگر و تنها اگر $|\text{tr}(A)| < 2$ و بیضوی است اگر و تنها اگر $|\text{tr}(A)| > 2$. در سایر حالات A را سهموی گوئیم. درواقع ماتریس‌های سهموی مرز بین ماتریس‌های هذلولوی و بیضوی در $SL(2, \mathbb{R})$ هستند. اگر درایه‌های یک ماتریس هذلولوی یا بیضوی مثل $A \in SL(2, \mathbb{R})$ را به مقدار به اندازه کافی کوچکی تغییر دهیم^۱، ماتریس حاصل نیز به ترتیب هذلولوی یا بیضوی خواهد بود. بنابراین مجموعه ماتریس‌های هذلولوی و بیضوی دو زیرمجموعه باز از $SL(2, \mathbb{R})$ هستند که مرز مشترکی دارند که دقیقاً متشکل از ماتریس‌های سهموی است.

تقسیم‌بندی ماتریس‌های $SL(2, \mathbb{R})$ به سه‌گانه هذلولوی، بیضوی، و سهموی به زبان عمل این ماتریس‌ها بر صفحه هذلولوی نیز قابل بیان است که در بخش ۵ به آن اشاره خواهد شد (مسئله ۱۳ و شکل ۴ را ببینید).

۰۱. تغییر درایه‌ها باید به‌گونه‌ای باشد که دترمینان ماتریس برابر بماند.

حاصل ضرب تصادفی ماتریس‌ها/رجب‌زاده، رشادت، نصیری

با استفاده از این رده‌بندی که از مقادیر ویژه ماتریس‌های $SL(2, \mathbb{R})$ به دست آمد و با نگاه به صورت کانونی ژوردان هر ماتریس، می‌توان ثابت کرد که در هریک از این سه وضعیت سهموی، بیضوی، و هذلولوی ماتریس با یک صورت استاندارد مزدوج است.

گزاره ۵.۳. هر ماتریس $A \in SL(2, \mathbb{R})$ دقیقاً با یک عضو از خانواده‌های زیر مزدوج است.

$$R_\theta := \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}, \quad D_\lambda := \pm \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{bmatrix}, \quad U_1 = \pm \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix}$$

که در آن $\lambda > 1$ و $\theta \in [0, 2\pi)$.

در مورد رشد نرم توان‌های ماتریس‌های گزاره ۵.۳ می‌دانیم که برای هر ماتریس به صورت R_θ ، دنباله $\{\|R_\theta^n\|\}_{n \in \mathbb{N}}$ کران‌دار و برای هر ماتریس به صورت D_λ که در آن $1 < \lambda$ ، $\{\|D_\lambda^n\|\}_{n \in \mathbb{N}}$ رشد نمایی دارد. در مورد ماتریس U_1 توجه کنید که $U_1^n = (\pm 1)^n \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix}$ و طبق قسمت (ب) از مسئله ۱،

$$\|U_1^n\| = \sqrt{\frac{n^2 + n\sqrt{n^2 + 4} + 2}{2}}$$

پس $\lim_{n \rightarrow \infty} \|U_1^n\|/n = 1$ و بنابراین U_1 رشد خطی دارد. این مشاهدات به کمک مسئله ۳ صورت‌بندی زیر برای سه‌گانه بیضوی، سهموی، و هذلولوی را برحسب رشد در $SL(2, \mathbb{R})$ به دست می‌دهد.

گزاره ۶.۳. ماتریس $A \in SL(2, \mathbb{R})$ که برابر $\pm \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix}$ نباشد،

- هذلولوی است اگر و تنها اگر $\{\|A^n\|\}_{n \in \mathbb{N}}$ رشد نمایی داشته باشد.
- بیضوی است اگر و تنها اگر $\{\|A^n\|\}_{n \in \mathbb{N}}$ کران‌دار باشد.
- سهموی است اگر و تنها اگر $\{\|A^n\|\}_{n \in \mathbb{N}}$ رشد خطی داشته باشد.

چنان‌که در مثال‌های بخش ۱.۳ دیدیم مفهوم رشد قابل تعمیم به دستگاه‌های خطی نیز است. با این تعمیم، این سؤال مطرح می‌شود که آیا برای دستگاه‌های خطی رده‌بندی هذلولوی، بیضوی، و سهموی وجود دارد؟ و آیا می‌توان این مفاهیم را برحسب رشد دنباله‌های $\{\|A_n(x)\|\}_{n \in \mathbb{N}}$ برای نقاط مختلف $x \in X$ بیان کرد؟

در بخش‌های بعد به‌طور مفصل به این سؤالات می‌پردازیم.

۳.۳ رشد یکنواخت‌نمایی و رفتار یکنواخت‌هذلولوی

برای شناخت و دسته‌بندی رفتارهای دینامیکی، مسئله پایداری همواره از مهم‌ترین ویژگی‌های مورد مطالعه است. یک مثال مهم از رفتارهای پایدار سیستم‌های دینامیکی نگاشت $f: \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ است که با ضابطه زیر از ماتریس هذلولوی $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ روی چنبره دوبعدی القاء می‌شود:

$$f(x, y) = (2x + y, x + y) \quad (\text{به پیمانه } \mathbb{Z}^2). \quad (1.3)$$

در این دینامیک^۱ پیچیده‌ترین رفتارهای دینامیکی از جمله پدیده مهم آشوب مشاهده می‌شود و این رفتارهای دینامیکی پیچیده تحت پربیشدگی^۲ کوچک f برقرار می‌مانند. در واقع هر هموارریختی^۳ چنبره دوبعدی که دستگاه خطی مشتق آن به اندازه کافی به دستگاه خطی مشتق f نزدیک باشد رفتار مشابهی دارد. چنین هموارریختی‌هایی را یکنواخت‌هذلولوی^۴ می‌نامند.

در این بخش به معرفی دسته‌ای بزرگ از دستگاه‌های خطی می‌پردازیم که تعمیمی از مثال بالا ارائه می‌دهند و به‌طور طبیعی پایدارند، همچنین رشد این نوع از دستگاه‌های خطی در نقاط مختلف را بررسی می‌کنیم.

قبل از ارائه تعریف کلی در مورد دستگاه‌های خطی، دو پدیده پایدار در مورد ماتریس‌ها را تأکید می‌کنیم. رشد نمایی نرم توان‌ها و همین‌طور هذلولوی بودن، پدیده‌هایی پایدار در ماتریس‌ها هستند.

• اگر ماتریس مربعی A به‌گونه‌ای باشد که $\{\|A^n\|\}_{n \in \mathbb{N}}$ رشد نمایی داشته باشد، برای هر

ماتریس B به اندازه کافی نزدیک^۵ A مانند B دنباله $\{\|B^n\|\}_{n \in \mathbb{N}}$ نیز رشد نمایی دارد.

• اگر ماتریس مربعی A هذلولوی باشد، هر ماتریس B به اندازه کافی نزدیک A نیز هذلولوی

است.

پایداری هر دو رفتار بالا نتیجه پیوستگی مقادیر ویژه نسبت به تغییر درایه‌های ماتریس است. در

گزاره ۶.۳ دیدیم که در مورد ماتریس‌های 2×2 با دترمینان واحد دو مفهوم بالا بر هم منطبق

می‌شوند^۶. هر دو مفهوم هذلولوی بودن و رشد نمایی نرم قابل تعمیم به دستگاه‌های خطی کلی

نیز هستند که در اینجا با توجه به رویکرد مقاله برای دستگاه‌های خطی دوبعدی پیوسته و حافظ

۱. این نگاشت به نگاشت گره آرئولد معروف است. ۵. فاصله دو ماتریس A, B به صورت $\|A - B\|$ تعریف می‌شود و نزدیک بودن دو ماتریس به کمک این فاصله معنا پیدا می‌کند. ۶. این موضوع مستقیماً از فرمول گلفاند هم نتیجه می‌شود.

حاصل ضرب تصادفی ماتریس‌ها/رجب‌زاده، رشادت، نصیری

مساحت^۱ بیان می‌شوند. یعنی فرض می‌کنیم X یک فضای متریک فشرده و $f : X \rightarrow X$ و $A : X \rightarrow \text{SL}(2, \mathbb{R})$ توابعی پیوسته باشند.

تعریف ۷.۳ (رشد یکنواخت‌نمایی). می‌گوییم دستگاه خطی (f, A) دارای رشد یکنواخت‌نمایی است، اگر مقادیر حقیقی $\lambda > 1$ و $C > 0$ وجود داشته باشند که برای هر $x \in X$ و هر $n \in \mathbb{N}$ ،

$$C\lambda^n < \|A_n(x)\|. \quad (۲.۳)$$

به‌وضوح رشد یکنواخت‌نمایی تعمیمی از نمایی بودن رشد نمایی نرم توان‌های یک ماتریس است. واژه «یکنواخت» در تعریف بالا اشاره به این موضوع دارد که ثابت‌های C, λ برای همه نقاط فضا یکسان است و لذا نرخ رشد نمایی دنباله $\{\|A_n(x)\|\}_{n \in \mathbb{N}}$ مستقل از x فاصله مثبتی با صفر دارد.

مسئله ۶. ثابت کنید اگر برای هر $x \in X$ ، همه درایه‌های $A(x)$ مثبت باشد، دستگاه خطی (f, A) رشد یکنواخت‌نمایی دارد.

تعریف ۸.۳ (رفتار یکنواخت‌هذلولوی). دستگاه خطی (f, A) دارای رفتار یکنواخت‌هذلولوی^۲ است اگر مقادیر حقیقی $\lambda > 1$ و $C > 0$ و تابع پیوسته^۲ $v^s : X \rightarrow \mathbb{R}^2$ وجود داشته باشد که

- برای هر $x \in X$ ، $v^s(x)$ و $A(x)v^s(x)$ و $v^s(f(x))$ هم‌راستا باشند؛
- برای هر $x \in X$ و هر $n \in \mathbb{N}$ ، $|A_n(x)v^s(x)| < C\lambda^{-n}$.

مسئله ۷. در تعریف بالا ثابت کنید درحالتی که نداشت پایه^۲ f یک همسان‌ریختی باشد، تابع پیوسته^۲ $v^u : X \rightarrow \mathbb{R}^2$ نیز وجود دارد که برای هر $x \in X$ ، به عنوان یک فضای خطی توسط $v^s(x), v^u(x)$ تولید شود، بردارهای $v^u(f(x))$ و $v^u(x)$ برای هر $x \in X$ هم‌راستا باشند، و به‌علاوه در راستای v^u دستگاه خطی به‌صورت انبساطی عمل کند، یعنی برای هر $x \in X$ و هر $n \in \mathbb{N}$ ، $|A_n(x)v^u(x)| > C\lambda^n$.

دستگاه‌های خطی هذلولوی تعمیمی طبیعی از هموارریختی‌های با رفتار یکنواخت‌هذلولوی هستند. برای مثال در مورد نگاشت (۱.۳)، یا هر هموارریختی g که مشتق آن همه‌جا نزدیک

۱. منظور از دستگاه خطی حافظ مساحت، دستگاهی خطی است که ماتریس‌های نسبت داده شده به همه نقاط درمیان واحد داشته باشند.

ماتریس $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ باشد، دستگاه خطی (g, Dg) یک دستگاه خطی یکنواخت هذلولوی است (منظور از Dg مشتق هموار ریختی g است).

لذا یک سؤال طبیعی این است که آیا شبیه توان‌های یک ماتریس، پدیده‌های بالا در دستگاه‌های خطی نیز پایدارند؟

سؤال ۲. اگر دستگاه خطی (f, A) دارای رشد یکنواخت‌نمایی (به ترتیب رفتار یکنواخت هذلولوی) باشد، آیا دستگاه‌های خطی مثل (f, B) که در آن $\sup_{x \in X} \|A(x) - B(x)\|$ به اندازه کافی کوچک باشد نیز رشد یکنواخت‌نمایی (به ترتیب رفتار یکنواخت هذلولوی) دارند؟

و سؤال بعد این است که

سؤال ۳. آیا مشابه گزاره ۶.۳ که در مورد معادل بودن رشد‌نمایی نرم و هذلولوی بودن برای اعضای $SL(2, \mathbb{R})$ دیدیم، برای دستگاه‌های خطی با ماتریس‌های در $SL(2, \mathbb{R})$ نیز برقرار است؟

پاسخ یک طرف سؤال ۳ سراسر است. اگر دستگاه خطی (f, A) دارای رفتار یکنواخت هذلولوی باشد، با توجه به تعریف نرم ماتریس، برای هر $x \in X$ و هر $n \in \mathbb{N}$

$$\|A_n(x)\| \geq |A_n(x)v^u(x)| > C\lambda^n.$$

بنابراین (f, A) دارای رشد یکنواخت‌نمایی است. اما جهت دیگر حکم به ابزارهای پیشرفته‌تری نیاز دارد. در بخش ۲.۶ اثباتی از قضیه زیر ارائه می‌کنیم که به سؤال ۳ پاسخ مثبت می‌دهد.

قضیه ۹.۳. فرض کنید X یک فضای متریک فشرده و $f : X \rightarrow X$ و $A : X \rightarrow SL(2, \mathbb{R})$ توابعی پیوسته باشند. در این صورت دستگاه خطی (f, A) دارای رفتار یکنواخت هذلولوی است اگر و تنها اگر دارای رشد یکنواخت‌نمایی باشد.

تأکید می‌کنیم که قضیه بالا تنها در بُعد ۲ برقرار است. مثال‌های ساده‌ای از دستگاه‌های خطی با رشد یکنواخت‌نمایی در بعدهای بالاتر می‌توان ارائه داد که رفتار یکنواخت هذلولوی نداشته باشند.

۴.۳ رفتارهای بیضوی و شبه‌همدیس

در بخش قبل مفاهیم هذلولوی بودن و رشد یکنواخت‌نمایی را از ماتریس‌ها به دستگاه‌های خطی تعمیم دادیم. در این بخش سعی می‌کنیم تعمیمی از مفهوم ماتریس‌های بیضوی به مفهومی پایدار در دستگاه‌های خطی پیوسته دوبعدی ارائه دهیم.

حاصل ضرب تصادفی ماتریس‌ها/رجب‌زاده، رشادت، نصیری

تعریف ۱۰.۳. برای فضای متریک فشرده X و توابع پیوسته $f : X \rightarrow X$ و $A : X \rightarrow \text{SL}(2, \mathbb{R})$ دستگاہ خطی (f, A) را بیضوی گویند، اگر $x \in X$ و $n \in \mathbb{N}$ موجود باشد که $f^n(x) = x$ و $A_n(x)$ یک ماتریس بیضوی باشد.

با توجه به پایداری ماتریس‌های بیضوی تحت تغییر کوچک درایه‌ها و پیوستگی $x \mapsto A(x)$ نتیجه می‌گیریم که دستگاہ‌های خطی بیضوی نیز پایدار هستند. برای $A, B : X \rightarrow \text{SL}(2, \mathbb{R})$ ، فاصله C^0 بین آن‌ها به صورت زیر تعریف می‌شود

$$d_{C^0}(A, B) := \sup_{x \in X} \|A(x) - B(x)\|. \quad (3.3)$$

پایداری دستگاہ‌های خطی بیضوی به این معنی است که اگر دستگاہ خطی (f, A) بیضوی باشد برای هر تابع پیوسته $B : X \rightarrow \text{SL}(2, \mathbb{R})$ که با فاصله d_{C^0} تعریف شده در (۳.۳) به اندازه کافی به A نزدیک باشد، دستگاہ خطی (f, B) نیز بیضوی است.

به‌علاوه به‌وضوح یک دستگاہ خطی بیضوی نمی‌تواند هذلولوی باشد و برعکس. منیه در [۱۵] نشان داد که مشابه ماتریس‌های عضو $\text{SL}(2, \mathbb{R})$ ، در مورد دستگاہ‌های خطی نیز با انتخاب مناسب دینامیک پایه، اجتماع دو پدیده پایدار بیضوی و هذلولوی در فضای همه دستگاہ‌های خطی (نسبت به فاصله d_{C^0}) چگال است. منیه نشان می‌دهد که اگر دینامیک پایه، نگاشت تغییر جا دنباله‌ها به سمت چپ در مثال ۳.۲ و یا هموارریختی روی چنبره دوبعدی باشد که مشتق آن همه‌جا به مشتق نگاشت معرفی شده در (۱.۳) نزدیک باشد، آنگاه این دوگانگی برقرار است.

گفتنی است که حکم مشابه قضیه منیه برای حاصل ضرب تصادفی ماتریس‌های دوبعدی را اوپلا، بوکی، و یوکوز در [۴] ثابت کردند. تفاوت حکم اثبات شده در [۴] با احکام منیه در [۱۵] این است که در [۱۵] فضای همه دستگاہ‌های خطی پیوسته با دینامیک پایه تغییر جای دنباله‌ها در نظر گرفته می‌شود، درحالی‌که در [۴] دستگاہ‌های خطی مورد مطالعه به دستگاہ‌های خطی وابسته به حاصل ضرب تصادفی ماتریس‌ها محدود است. ممکن است تحدید یک مجموعه باز و چگال در فضای همه دستگاہ‌های خطی پیوسته به این زیرفضای محدودتر، باز و چگال نباشد و به این دلیل اثبات حکم مشابه در یک زیرفضای کوچک‌تر به تحلیل ظریف‌تری از دستگاہ‌های خطی وابسته به ضرب ماتریس‌ها نیاز دارد.

در ادامه سؤالی که به‌طور طبیعی مطرح می‌شود چنین است. آیا مثالی از پدیده‌های پایدار دیگر در بعدهای بالاتر یافت می‌شود؟ رفتار یکنواخت هذلولوی در همه ابعاد قابل تعریف است و رفتاری

پایدار در بین همه دستگاه‌های پیوسته است. اما آیا می‌توان معادل رفتار بیضوی را در ابعاد بالاتر به‌گونه‌ای تعریف کرد که پایدار باشد؟

برای شروع، تعریفی از رفتاری مشابه رفتار بیضوی برای دنباله‌ای از ضرب ماتریس‌ها ارائه می‌کنیم. آنچه برحسب نرخ رشد ماتریس‌های بیضوی را از سایر ماتریس‌ها متمایز می‌کند، کران‌دار بودن دنباله نرم توان‌های آن است. این دیدگاه انگیزه‌ای برای تعریف زیر است.

تعریف ۱۱.۳. برای فضای متریک فشرده X و توابع پیوسته $f : X \rightarrow X$ و $A : X \rightarrow \text{SL}(d, \mathbb{R})$ ، دستگاه خطی (f, A) را دارای رفتار شبه‌همدیس^۱ گویند، اگر $x \in X$ یافت شود که دنباله $\{\|A_n(x)\|\}_{n \in \mathbb{N}}$ کران‌دار باشد.

توجه کنید که در تعریف ۱۱.۳، برخلاف تعریف ۱۰.۳، لزوماً نقطه x تناوبی نیست. به‌وضوح هر دستگاه خطی بیضوی شبه‌همدیس است، اما مثال زیر نشان می‌دهد که در حالت کلی عکس این موضوع برقرار نیست.

مثال ۱۲.۳. فرض کنید α, β دو عدد حقیقی مثبت با نسبت ناگویا باشند. اگر در مثال ۳.۲، $k = d = 2$ باشد و $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ و $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -\beta \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ، دستگاه خطی وابسته شبه‌همدیس است، ولی بیضوی نیست. درواقع برای هر $x \in X$ و $n \in \mathbb{N}$ $f^n(x) = x$ و $A_n(x)$ به صورت $\begin{bmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ است که $s \neq 0$ ، و بنابراین $A_n(x)$ بیضوی نیست. درحالی‌که می‌توان $x \in \Sigma_2$ را طوری یافت که دنباله $\{\|A_n(x)\|\}_{n \in \mathbb{N}}$ کران‌دار بماند.

نکته قابل‌توجه دیگر در تعریف رفتار شبه‌همدیس این است که برخلاف رفتار بیضوی، چنین دستگاه‌های خطی لزوماً پایدار نیستند. می‌توان مثالی از دستگاه خطی A' ارائه کرد که نسبت به فاصله d_C به اندازه کافی به دستگاه خطی مثال بالا نزدیک باشند ولی برای هر $x \in X$ $\lim_{n \rightarrow \infty} \|A'_n(x)\| = +\infty$. برای این منظور کافی است برای هر مقدار $r > 1$ که به اندازه کافی به ۱ نزدیک باشد، دستگاه خطی نسبت داده‌شده به ماتریس‌های زیر را در نظر بگیریم

$$A'_1 = \begin{bmatrix} r & \alpha \\ 0 & r^{-1} \end{bmatrix}, \quad A'_2 = \begin{bmatrix} r & -\beta \\ 0 & r^{-1} \end{bmatrix}.$$

اما در پاسخ به این سؤال که «آیا رفتار شبه‌همدیس پایدار در ابعاد بیشتر از ۲ وجود دارد؟» و اینکه

«آیا مشابه احکام اشاره‌شده از [۴، ۱۵] در توصیف رفتار دوگانه در ابعاد بالاتر وجود دارد؟» در [۱۶] پاسخ زیر داده شده است.

قضیه ۱۳.۳. برای هر عدد طبیعی $d \geq 2$ ، دستگاه‌های خطی پیوسته^d بعدی را که رفتار هذلولوی ندارند می‌توان با دستگاه‌های خطی به‌طور پایدار شبه‌همدیس تقریب زد.

در اینجا پایداری تنها در توپولوژی C^γ برای $\gamma > 0$ برقرار است. گفتنی است که قضیه ۱۳.۳ در همهٔ ابعاد برقرار است، اما در بعد بیشتر از ۲، رفتار هذلولوی جای خود را به مفهومی به نام «تجزیهٔ تسلطی»^۱ می‌دهد. مفهوم تجزیهٔ تسلطی بنا بر تعریفِ تعمیمی از رفتار یکنواخت‌هذلولوی است که در آن دو زیرفضا لزوماً رفتار انقباضی، انبساطی ندارند، بلکه نحوهٔ رشد بردارهای یکی از دو زیرفضا در مقایسه با دیگری رشد نمایی دارد. این ویژگی همانند رفتار هذلولوی پایدار است. در بعد ۲ برای دستگاه‌های خطی در $SL(2, \mathbb{R})$ این دو مفهوم معادل‌اند. برای جزئیات بیشتر در مورد مفهوم تجزیهٔ تسلطی و اهمیت آن در سیستم‌های دینامیکی هموار به [۹] مراجعه کنید. همچنین برای مطالعهٔ بیشتر در مورد رفتار شبه‌همدیس در دستگاه‌های خطی می‌توانید [۱۶] را مطالعه کنید.

۴ رفتارهای دینامیکی از منظر احتمالاتی

در مسئلهٔ ۴ دیدیم که برخلاف توان‌های یک ماتریس ثابت که همیشه نرخ رشد نرم برای آن‌ها وجود دارد، مثال‌هایی از دستگاه‌های خطی در دست است که برای بعضی نقاط این نرخ رشد وجود ندارد (دنبالهٔ مربوط واگراست). اما آیا می‌توان مثالی از توابع پیوستهٔ $f : X \rightarrow X$ و $A : X \rightarrow SL(2, \mathbb{R})$ پیدا کرد که برای هر $x \in X$ دنبالهٔ $\frac{1}{n} \ln \|A_n(x)\|$ واگرا باشد؟ در این بخش از دیدگاه احتمالاتی رشد در دستگاه‌های خطی را بررسی می‌کنیم و نشان می‌دهیم که مجموعهٔ نقاطی که نرخ رشد برای آن‌ها قابل تعریف است از منظر اندازه‌های احتمال خاصی روی فضای X تقریباً همه نقاط هستند.

۱.۴ قضیه‌های ارگودیک

شاخهٔ نظریه ارگودیک به رفتار آماری سیستم‌های دینامیکی از دید یک اندازهٔ احتمال ناورد می‌پردازد. منظور از یک اندازهٔ احتمال ناورد تحت $f : X \rightarrow X$ ، اندازه‌ای مثل μ روی X است^۲ که

۲. این اندازه روی سیگماجبر زیرمجموعه‌های بورل X تعریف شده است.

$\mu(X) = 1$ و برای هر زیرمجموعه اندازه‌پذیر Z از X ، $\mu(Z) = \mu(\{x : f(x) \in Z\})$. قضیه‌ای معروف در نظریه ارگودیک^۱ تضمین می‌کند که هر تابع پیوسته تعریف شده روی یک فضای متریک فشرده دست‌کم دارای یک اندازه ناورد است.

با استفاده از صورت دینامیکی لم ۴.۳، که به قضیه ارگودیک زیرجمعی کینگمن^۲ معروف است، می‌توانیم به سؤالات مطرح شده در ابتدای این بخش پاسخ منفی دهیم. این قضیه نتیجه می‌دهد که مجموعه نقاطی مثل x که حد

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \|A_n(x)\| \quad (1.4)$$

برای آن‌ها وجود دارد، نسبت به هر اندازه احتمال ناوردا تحت $f : X \rightarrow X$ اندازه کامل دارد. قضیه ارگودیک زیرجمعی (قضیه ۱.۴) به دلیل وجود اندازه‌های احتمال ناوردا وجود نقاطی با نرخ رشد نمایی نرم را تضمین می‌کند. مقدار حد (۱.۴) که نرخ رشد نمایی $\|A_n(x)\|$ را نمایش می‌دهد، حالت خاصی از مفهومی حائز اهمیت در سیستم‌های دینامیکی به نام نمای لیاپونف است. دنباله $\{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ از توابع $\phi_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ را در نظر بگیرید. می‌گوییم این دنباله برای دینامیک $f : X \rightarrow X$ زیرجمعی است، اگر برای هر $x \in X$ و هر $m, n \in \mathbb{N}$

$$\phi_{n+m}(x) \leq \phi_m(x) + \phi_n(f^m(x)).$$

قضیه ۱.۴ (ارگودیک زیرجمعی). فرض کنید X یک فضای متریک فشرده و μ یک اندازه احتمال روی X باشد. $f : X \rightarrow X$ را نگاهی پیوسته فرض کنید که اندازه احتمال μ تحت آن ناوردا می‌ماند. همچنین $\phi_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ را برای $1 \leq n$ دنباله‌ای زیرجمعی از توابع پیوسته در نظر بگیرید و مجموعه همه نقاطی مثل x را که حد $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \phi_n(x)$ وجود دارد \mathcal{R}_μ بنامید. در این صورت $\mu(\mathcal{R}_\mu) = 1$. به علاوه اگر مقدار حد را با $\phi(x)$ نمایش دهیم، $\phi : X \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی اندازه‌پذیر تعریف می‌کند که برای هر $x \in \mathcal{R}_\mu$ ، $\phi(f(x)) = \phi(x)$.

جالب است اشاره کنیم که معروف‌ترین قضیه نظریه ارگودیک، یعنی قضیه ارگودیک برکاف از قضیه ۱.۴ نتیجه می‌شود. برای مطالعات بیشتر در این باره و همین‌طور اثبات قضیه ۱.۴ به [۲۱] رجوع کنید که اثباتی از [۳] را برای قضیه ارگودیک زیرجمعی ارائه می‌کند.

حاصل ضرب تصادفی ماتریس‌ها/رجب‌زاده، رشادت، نصیری

مسئله ۸. فرض کنید X یک فضای متریک فشرده و $f : X \rightarrow X$ و $A : X \rightarrow GL(d, \mathbb{R})$ تابع‌هایی پیوسته باشند. به کمک قضیه ۱.۴ ثابت کنید نقاط $x \in X$ که برای آن‌ها حدهای تابع $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \|A_n(x)\|$ و $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\det A_n(x)|$ وجود دارد نسبت به هر اندازه احتمال ناوردا تحت f اندازه کامل دارد.

قضیه ارگودیک ضربی، که در ادامه می‌آید، نشان می‌دهد که علاوه بر وجود نرخ رشد نمایی برای دترمینان و نُرم دنباله‌های وابسته به دستگاه‌های خطی می‌توان نشان داد که نرخ رشد نمایی برای طول تصویر بردارها هم وجود دارد. قضیه ارگودیک ضربی در هر بُعدی برقرار است، ولی با توجه به اثباتی که به کمک هندسه هذلولوی برای این حکم ارائه می‌دهیم قضیه را برای دستگاه‌های خطی دو بُعدی حافظ مساحت بیان می‌کنیم.

قضیه ۲.۴ (قضیه ارگودیک ضربی). فرض کنید X یک فضای متریک فشرده و μ یک اندازه احتمال روی X باشد. $f : X \rightarrow X$ را نگاشتی پیوسته فرض کنید که اندازه احتمال μ تحت آن ناوردا می‌ماند. همچنین $A : X \rightarrow SL(2, \mathbb{R})$ را تابعی پیوسته بگیرید. در این صورت برای μ -تقریباً هر $x \in X$ حد زیر وجود دارد

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \|A_n(x)\|.$$

به علاوه اگر مقدار این حد را (در صورت وجود) با $\lambda(x)$ نمایش دهیم، $\lambda : X \rightarrow [0, \infty)$ تابعی اندازه‌پذیر است و

- اگر $\lambda(x) = 0$ ، برای هر بردار ناصفر $v \in \mathbb{R}^2$ ، $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \|A_n(x)v\| = 0$.
- اگر $0 < \lambda(x)$ ، می‌توان زیرفضای یک بُعدی $E^s(x) \subset \mathbb{R}^2$ یافت که

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \|A_n(x)v\| = \begin{cases} \lambda(x) & v \in \mathbb{R}^2 \setminus E^s(x) \\ -\lambda(x) & v \in E^s(x) \setminus \{0\} \end{cases}$$

به اعداد $\lambda(x)$ ، $-\lambda(x)$ در قضیه بالا اصطلاحاً نماهای لیاپونف سیستم خطی (f, A) گفته می‌شود. می‌توان نشان داد که اگر λ در نقطه x تعریف شود، در در نقطه $f(x)$ نیز تعریف خواهد شد و $\lambda(f(x)) = \lambda(x)$.

قضیه ارگودیک ضربی ۲.۴ به قضیه اُسِلِدِتس^۱ نیز شهرت دارد و چنان‌که قبل از قضیه ذکر شد

محدود به بُعد ۲ نیست؛ قضیه مشابهی در هر بُعد برقرار است. به علاوه فرض‌های فشردگی X و پیوستگی A را نیز می‌توان با شرط انتگرال‌پذیری تابع $x \mapsto \ln \|A(x)\|$ نسبت به اندازه μ جایگزین کرد. این قضیه را ابتدا فورستنبرگ و کِستِن در [۱۱] برای حاصل‌ضرب تصادفی ماتریس‌ها (مثال ۳.۲ با اندازه برنولی حاصل از وزن‌دهی برابر روی اعضای A)^۱ ثابت کردند و بعدتر در [۱۸] به صورت کلی فعلی در آمد.

مثال ۳.۴. اگر در مثال ۳.۲ فرض کنیم $k = d = ۲$ ، $A_1 = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{bmatrix}$ و $A_2 = \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & b^{-1} \end{bmatrix}$ ، در آن $a, b > ۱$ ، در این صورت اگر μ اندازه برنولی حاصل از وزن‌دهی برابر روی اعضای A باشد، برای μ -تقریباً هر $x \in \Sigma_2$ ، $\lambda(x) = \ln \sqrt{ab}$.

حالت کلی‌تر مثال بالا این است که برای $A : X \rightarrow \text{SL}(2, \mathbb{R})$ ، اگر دستگاه خطی (f, A) دارای رشد یکنواخت‌نمایی باشد، نسبت به هر اندازه ناورداد در تقریباً همه نقاط یک نمای لیاپونف مثبت و یک نمای لیاپونف منفی دارد.

مسئله ۹. تحت شرایط مثال ۳.۴، اگر $a, b > ۰$ ثابت کنید برای μ -تقریباً هر $x \in \Sigma_2$ ،

$$\lambda(x) = \max\{\ln \sqrt{ab}, -\ln \sqrt{ab}\}.$$

مثال زیر، که از [۱۳] گرفته شده است، نقطه مقابل مثال بالاست و در آن نماهای لیاپونف برای اندازه برنولی برابر صفر هستند.

مثال ۴.۴. تحت شرایط مثال ۳.۲، اگر $k = d = ۲$ ، $A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$ و $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ ، برای μ -تقریباً هر $x \in \Sigma_2$ ، $\lambda(x) = ۰$.

۲.۴ رشد سایر کمیت‌های ماتریسی

فرض می‌کنیم X یک فضای متریک فشرده و μ یک اندازه احتمال روی آن باشد که تحت تابع پیوسته $f : X \rightarrow X$ ناورداد می‌ماند. به علاوه $A : X \rightarrow \text{SL}(2, \mathbb{R})$ نیز نگاشتی پیوسته باشد. در بخش قبل دیدیم که قضیه ارگودیک زیرجمعی تضمین می‌کند که برای μ -تقریباً هر $x \in X$ نرخ رشد نمایی دنباله $\{\|A_n(x)\|\}_{n \in \mathbb{N}}$ تعریف می‌شود، یعنی $\|A_n(x)\|^{1/n}$ یا $\frac{1}{n} \ln \|A_n(x)\|$ دنباله‌هایی همگرا هستند. قضیه ارگودیک ضربی شناخت دقیق‌تری از دنباله $\{A_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$

۰۱. این اندازه تحت نگاشت σ معرفی‌شده در مثال ۳.۲ ناورداد است.

حاصل ضرب تصادفی ماتریس‌ها/رجب‌زاده، رشادت، نصیری

به دست می‌دهد و نشان می‌دهد که برای هر بردار ناصفر $v \in \mathbb{R}^2$ ، نرخ رشد نمایی دنباله $\{\|A_n(x)v\|\}_{n \in \mathbb{N}}$ نیز برای μ -تقریباً هر $x \in X$ تعریف می‌شود.

سؤالی که در این بخش به آن می‌پردازیم وجود نرخ رشد نمایی برای کمیت‌های دیگر وابسته به دنباله ماتریس‌های $\{A_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ است.

سؤال ۴. تحت شرایط بالا آیا برای μ -تقریباً هر $x \in X$ دنباله‌های

$$\rho(A_n(x))^{1/n}, |\text{tr}(A_n(x))|^{1/n}, |A_n^{i,j}(x)|^{1/n}, |A_n^j(x)|^{1/n}, \dots$$

همگرا هستند،^۱ که در آن $A_n^{i,j}(x)$ درایه i, j ماتریس $A_n(x)$ و $|A_n^j(x)|$ نرم j امین ستون این ماتریس است ($i, j = 1, 2$)؟ در صورت همگرایی، ارتباط حد آن‌ها با نماهای لیاپونف چیست؟

قضیه ارگودیک ضربی به سؤال بالا در مورد دنباله $|A_n^j(x)|^{1/n}$ پاسخ می‌دهد. می‌توان هر یک از ستون‌های یک ماتریس را با اثر آن روی یک بردار پایه استاندارد \mathbb{R}^2 به دست آورد. در واقع اگر $e_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ و $e_2 := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ آن‌گاه $A_n^j(x) = A_n(x)e_j$ و بنابراین طبق قضیه ارگودیک ضربی برای μ -تقریباً هر x ، حد $\lim_{n \rightarrow \infty} |A_n^j(x)|^{1/n}$ وجود دارد و برابر یکی از دو عدد $e^{\pm \lambda(x)}$ است. اما در مورد دنباله $|A_n^{i,j}(x)|^{1/n}$ پاسخ سؤال بالا منفی است. مثال ۴.۴ نمونه‌ای است که در آن حد مذکور وجود ندارد.

مسئله ۱۰. به کمک قانون قوی اعداد بزرگ در احتمال، ثابت کنید در مثال ۴.۴ برای هر $i, j \in \{1, 2\}$ ، برای μ -تقریباً هر $x \in \Sigma_2$ ،

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} |A_n^{i,j}(x)|^{1/n} = 0, \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} |A_n^{i,j}(x)|^{1/n} = \sqrt{2}.$$

جالب است اشاره کنیم که اگر همه درایه‌های ماتریس‌های نسبت داده شده به نقاط X مثبت باشند، فورستنبرگ و کستن در [۱۱] ثابت کردند که حد مربوط به رشد نمایی هر یک از درایه‌ها وجود دارد.

مسئله بالا به سؤال ۴ در مورد دنباله $|\text{tr}(A_n(x))|^{1/n}$ نیز پاسخ منفی می‌دهد. دستگاه خطی مثال ۴.۴ به شکلی تنظیم شده است که همه ماتریس‌های $A_n(x)$ به یکی از دو صورت

۱. اگر تابع A به‌جای $\text{SL}(2, \mathbb{R})$ در $\text{GL}(2, \mathbb{R})$ مقدار اختیار می‌کرد، دنباله $\sqrt[n]{|\det A_n(x)|}$ هم به این فهرست اضافه می‌شد. در قضیه ۱.۴ دیدیم که این دنباله برای μ -تقریباً هر $x \in X$ همگرا است.

$\text{tr}(A_n(x)) =$ چنانچه r عدد حقیقی ناصفری است. حالا چون $\begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & r^{-1} \end{bmatrix}$ و یا $\begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & -r^{-1} \end{bmatrix}$ باشند که در آن r عدد حقیقی ناصفری است. حالا چون $\text{tr}(A_n(x)) =$ $A_n^{1,1}(x) + A_n^{2,2}(x)$ از مسئله ۱۰ نتیجه می‌شود که برای μ -تقریباً هر $x \in X$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} |\text{tr}(A_n(x))|^{1/n} = 0, \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} |\text{tr}(A_n(x))|^{1/n} = \sqrt{2}.$$

قضیه زیر [۲] که از قضیه ارگودیک ضربی نتیجه می‌شود، پاسخ سؤال ۴ برای دنباله $\rho(A_n(x))^{1/n}$ را می‌دهد.

قضیه ۵.۴ ([۲]، قضیه ۱۵). تحت شرایط قضیه ۲.۴ اگر تابع f وارون‌پذیر باشد، برای μ -تقریباً هر $x \in X$

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \rho(A_n(x))^{1/n} = e^{\lambda(x)}$$

که در آن $\lambda(x)$ همان نمای لیاپونف در نقطه x است.

از قضیه بالا در حالتی که $\lambda(x) = 0$ نتیجه می‌شود که $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(A_n(x))^{1/n}$ وجود دارد و برابر ۱ است. اما در حالت کلی نمی‌توان انتظار داشت که این حد وجود داشته باشد. در [۲]، مثال ۱۶] مثالی از یک دستگاه خطی دوبعدی ارائه شده است که برای تقریباً همه نقاط مقدار $\limsup_{n \rightarrow \infty} \rho(A_n(x))^{1/n}$ مثبت است ولی برای تقریباً هر x ، دنباله $n_1 < n_2 < \dots$ از اعداد طبیعی یافت می‌شود که $\rho(A_{n_i}(x)) = 1$ و بنابراین $\liminf_{n \rightarrow \infty} \rho(A_n(x))^{1/n} = 0$ و در نتیجه این حد وجود ندارد.

۳.۴ رفتارهای متداول در دستگاه‌های خطی

در بخش قبل نمای لیاپونف را تعریف کردیم. مثبت بودن نمای لیاپونف نسبت به یک اندازه ناوردای این نتیجه را در پی دارد که حاصل ضرب ماتریس‌های نسبت داده‌شده به اکثر نقاط فضا از دید آن اندازه دارای رشد نمایی است. حال می‌توان پرسید که با فرض ثابت بودن نگاهت f و اندازه مرجع μ روی X ، کدام رفتار در بین دستگاه‌های خطی (f, A) برای توابع مختلف $A : X \rightarrow \text{SL}(2, \mathbb{R})$ غالب است؟ آیا اکثر دستگاه‌های خطی رشد نمایی دارند؟ به بیان دقیق‌تر، آیا برای بیشتر دستگاه‌های خطی نمای لیاپونف برابر صفر است؟

پاسخ سؤال بالا بستگی زیادی به فضای X و تابع f دارد. برای مثال اگر X تک‌عضوی باشد، تنها تابع قابل تعریف روی X تابع همانی است و تنها یک اندازه ناوردای X وجود دارد که به

آن عضو وزن ۱ را نسبت می‌دهد. در این حالت رفتار هر دستگاه خطی متناظر با رفتار توان‌های یک ماتریس است که چنان‌که دیدیم رفتارهای بیضوی و هذلولوی هر دو قابل مشاهده هستند.

قضیه ۶.۴ ([۱]). فرض کنید X یک فضای متریک فشرده و $f : X \rightarrow X$ تابعی پیوسته و μ یک اندازه احتمال ارگودیک تحت f باشد. اگر برای هر $k \in \mathbb{N}$ تحدید f^k به تکیه‌گاه μ نگاشت همانی نباشد، برای زیرمجموعه چگالی از توابع پیوسته $SL(2, \mathbb{R}) : X \rightarrow$ نمای لیاپونف دستگاه خطی (f, A) نسبت به اندازه μ ناصفر است.

چگال بودن در قضیه بالا نسبت به متریک d_{C^0} در نظر گرفته می‌شود که در (۳.۳) تعریف شد. منظور از تکیه‌گاه اندازه μ زیرمجموعه‌ای بسته از X متشکل از نقاطی مثل x است که μ به هر مجموعه باز شامل x اندازه مثبت نسبت می‌دهد. همچنین اندازه احتمال μ را نسبت به f ارگودیک گوئیم اگر برای هر زیرمجموعه اندازه‌پذیر $Z \subset X$ ، $\mu(Z) \in \{0, 1\}$. برای مشاهده تعریف‌های معادل دیگر برای اندازه‌های ارگودیک به [۲۱] رجوع کنید.

توجه کنید که فرض همانی نبودن توابع f^k روی تکیه‌گاه μ برای درستی قضیه ۶.۴ لازم است. برای مثال، در ساده‌ترین حالت اگر X یک فضای تک‌عضوی و f تابع همانی باشد، مجموعه دستگاه‌های خطی در تناظر با اعضای $SL(2, \mathbb{R})$ و نمای لیاپونف بزرگ‌تر همان لگاریتم شعاع طیفی است. در این حالت، از بخش ۲.۳ می‌دانیم ماتریس‌های هذلولوی و بیضوی که به ترتیب شعاع طیفی بزرگ‌تر از ۱ و برابر ۱ دارند، زیرمجموعه‌های بازی از $SL(2, \mathbb{R})$ هستند و بنابراین نمای لیاپونف ناصفر نمی‌تواند چگال باشد.

در ادامه، به جنبه دیگری از قضیه بالا اشاره می‌کنیم. هرچند قضیه بالا نشان می‌دهد که مجموعه دستگاه‌های خطی دارای نمای لیاپونف مثبت در متریک d_{C^0} چگال‌اند، اما آیا این دستگاه‌ها زیرمجموعه بازی از همه دستگاه‌های خطی تعریف می‌کنند؟ در حالی که دستگاه خطی یکنواخت هذلولوی باشد، می‌توان نشان داد که هر دستگاه خطی نزدیک نیز یکنواخت هذلولوی است و بنابراین نمای لیاپونف مثبت دارد.

اما قضیه زیر بیان می‌کند که دور از دستگاه‌های با رفتار یکنواخت هذلولوی، برای زیرمجموعه چگالی از دستگاه‌های خطی نماهای لیاپونف برابر صفر است.

قضیه ۷.۴ ([۶]، قضیه [C]). فرض کنید X یک فضای متریک فشرده و $f : X \rightarrow X$ تابعی پیوسته و μ یک اندازه احتمال ارگودیک تحت f باشد. اگر برای تابع پیوسته $A : X \rightarrow$

$SL(2, \mathbb{R})$ دستگاه خطی (f, A) یکنواخت هذلولوی نباشد، می‌توان توابع پیوسته $B : X \rightarrow SL(2, \mathbb{R})$ یافت که در متریک d_{C^0} به دلخواه نزدیک A باشند و نماهای لیاپونف دستگاه خطی (f, B) نسبت به اندازه μ هر دو برابر صفر باشند.

از ترکیب دو قضیه بالا نتیجه می‌شود که اگر برای هر $k \in \mathbb{N}$ تعیین f^k به تکیه‌گاه اندازه μ همانی نباشد، هر دستگاه خطی یا یکنواخت هذلولوی است و یا می‌توان آن را هم‌زمان در متریک d_{C^0} با دستگاه‌های خطی با نمای لیاپونف صفر و دستگاه‌های خطی با نمای لیاپونف مثبت و منفی تقریب زد.

قضیه‌های بالا وابستگی زیادی به توپولوژی C^0 روی دستگاه‌های خطی دارد. خالی از لطف نیست که به قضیه‌ای در مورد دستگاه‌های خطی با درجه همواری بیشتر اشاره کنیم. برای این منظور باید فرض کنیم X یک خمینه ریمانی بسته و $f : X \rightarrow X$ تابعی هموار باشد که اندازه‌لقایی از متریک ریمانی را حفظ می‌کند. در چنین حالتی می‌توان از دستگاه‌های خطی هموار روی f صحبت کرد. منظور از یک دستگاه خطی C^r روی f یک تابع مثل $A : X \rightarrow SL(2, \mathbb{R})$ است که هر یک از درایه‌ها به‌عنوان یک تابع حقیقی مقدار C^r باشد. به‌علاوه دو دستگاه خطی C^r در توپولوژی C^r به هم نزدیک هستند اگر برای هر $0 \leq j \leq r$ ، مشتق‌های مرتبه j در درایه‌های متناظر در نقطه‌های یکسان به هم نزدیک باشند.

حال اگر تابع f به اندازه کافی غنی باشد، مجموعه دستگاه‌های خطی C^r که نمای لیاپونف مثبت دارند، یک زیرمجموعه باز و چگال از فضای همه دستگاه‌های خطی C^r نسبت به توپولوژی C^r هستند. مثالی از تابع f که این شرایط را داشته باشد، تابع معرفی شده در (۱.۳) روی چنبره دوعدی یا هر تابعی روی چنبره است که مشتق آن در همه نقاط به مشتق تابع این مثال نزدیک باشد (برای جزئیات بیشتر به [۱۹] رجوع کنید).

۵ ضرب ماتریس‌ها و هندسه هذلولوی

در این بخش پس از بیان مقدماتی از هندسه هذلولوی روابطی جدید بین رفتار ضربی ماتریس‌ها و ترکیب طولیایی‌های هندسه هذلولوی را ثابت می‌کنیم. با استفاده از این نتایج در بخش بعد اثبات‌هایی کوتاه از قضیه ارگودیک ضربی و قضیه ۹.۳ ارائه خواهیم کرد.

۱.۵. مقدماتی از هندسه هذلولوی

مدل‌های مختلفی برای هندسه هذلولوی وجود دارد که هرچند با هم معادل‌اند اما هریک از دیدگاهی ترجیح دارد. دو مورد از معروف‌ترین این مدل‌ها به مدل دیسک پوانکاره و مدل نیم‌صفحه بالایی پوانکاره معروف‌اند. در هر دو مدل مجموعه نقاط فضا زیرمجموعه‌ای از \mathbb{C} با نوع خاصی از تعریف فاصله هستند. در مدل دیسک نقطه‌های درون دیسک به شعاع ۱ به مرکز مبدأ و در مدل نیم‌صفحه مجموعه اعداد مختلط با جزء مختلط مثبت نقاط فضا را تشکیل می‌دهند. مجموعه نقاط در مدل دیسک و نیم‌صفحه را به ترتیب با \mathbb{D} و \mathbb{H} نمایش می‌دهیم.

$$\mathbb{D} = \{w \in \mathbb{C} : |w| < 1\} \quad \text{و} \quad \mathbb{H} = \{w \in \mathbb{C} : \text{Im}(w) > 0\}.$$

فاصله هذلولوی روی \mathbb{D} و \mathbb{H} را به ترتیب با $\rho_{\mathbb{D}}$ و $\rho_{\mathbb{H}}$ نمایش می‌دهیم که به صورت زیر تعریف می‌شوند

$$\rho_{\mathbb{D}}(z, w) := \ln \frac{|\lambda - z\bar{w}| + |z - w|}{|\lambda - z\bar{w}| - |z - w|}, \quad (1.5)$$

$$\rho_{\mathbb{H}}(z, w) := \ln \frac{|z - \bar{w}| + |z - w|}{|z - \bar{w}| - |z - w|}. \quad (2.5)$$

تابع $\iota: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{D}$ با ضابطه $\iota(z) = \frac{z-i}{z+i}$ یک تابع دوسویی بین \mathbb{H} و \mathbb{D} به دست می‌دهد که فاصله هذلولوی نقاط را حفظ می‌کند، به این معنی که برای هر $z, w \in \mathbb{H}$ داریم $\rho_{\mathbb{D}}(\iota(z), \iota(w)) = \rho_{\mathbb{H}}(z, w)$. به این ترتیب، اگر $\psi: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ یک طولپایی نسبت به $\rho_{\mathbb{H}}$ باشد، $\iota\psi\iota^{-1}: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ نسبت به $\rho_{\mathbb{D}}$ طولپایی است. به طریق مشابه می‌توان با مزدوج‌گیری از هر طولپایی از \mathbb{D} یک طولپایی از \mathbb{H} به دست آورد. در واقع تحت مزدوج‌گیری به کمک نگاشت ι گروه طولپایی‌های مدل دیسک و نیم‌صفحه یکریخت هستند.

مسئله ۱.۱. (الف) نشان دهید هر طولپایی جهت‌نگهدار از \mathbb{D} نسبت به متریک $\rho_{\mathbb{D}}$ به صورت $\varphi(z) =$

$$|\alpha| < |\beta| = 1 \quad \text{است که در آن } \alpha, \beta \text{ اعدادی مختلط هستند که}$$

(ب) نشان دهید هر طولپایی جهت‌نگهدار از \mathbb{H} نسبت به متریک $\rho_{\mathbb{H}}$ به صورت $\psi(z) = \frac{az+b}{cz+d}$

$$\text{است که در آن } a, b, c, d \text{ اعدادی حقیقی هستند که } ad - bc = 1.$$

۲.۵. ماتریس‌ها و خودریختی‌های صفحه هذلولوی

با توجه به قسمت (ب) از مسئله ۱.۱ برای هر ماتریس $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \text{SL}(2, \mathbb{R})$ نگاشت

$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ یک طولپایی جهت‌نگهدار از \mathbb{H} تعریف می‌کند. با توجه به وابستگی این طولپایی به ماتریس A ، آن را با ψ_A نمایش می‌دهیم. می‌توان به‌سادگی نشان داد تابعی که به هر ماتریس A ، ψ_A را نسبت می‌دهد یک هم‌ریختی گروهی بین گروه ضربی $SL(2, \mathbb{R})$ و گروه طولپایی جهت‌نگهدار \mathbb{H} می‌دهد. به‌علاوه طبق قسمت (ب) از مسئله ۱۱ همه طولپایی‌های جهت‌نگهدار \mathbb{H} به این صورت هستند و بنابراین هم‌ریختی بالا پوشا است. با استفاده از هم‌ارزی همدیس $\iota: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{D}$ ، که بالاتر معرفی شد، می‌توان نتیجه گرفت که تابعی که به هر $A \in SL(2, \mathbb{R})$ طولپایی $\varphi_A := \iota \psi_A \iota^{-1}$ را نسبت می‌دهد نیز یک هم‌ریختی پوشا بین گروه $SL(2, \mathbb{R})$ و گروه طولپایی‌های جهت‌نگهدار \mathbb{D} به دست می‌دهد.

مسئله ۱۲. (الف) برای هر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL(2, \mathbb{R})$ نشان دهید

$$\varphi_A(z) = \frac{(a+d+bi-ci)z + (a-d-bi-ci)}{(a-d+bi+ci)z + (a+d-bi+ci)}$$

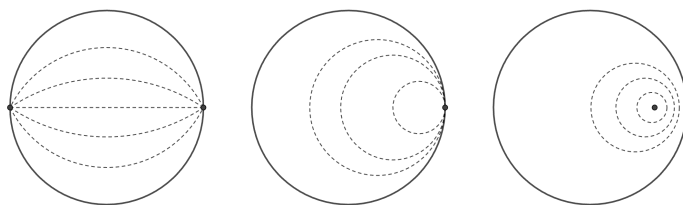
(ب) برای هر $A \in SL(2, \mathbb{R})$ ، نشان دهید $\varphi_A(0) = 0$ اگر و تنها اگر ماتریس A دوران باشد.

در ادامه، همانند بالا برای هر $A \in SL(2, \mathbb{R})$ طولپایی جهت‌نگهدار متناظر با ماتریس A روی \mathbb{H} و \mathbb{D} را به ترتیب با ψ_A و φ_A نمایش خواهیم داد. همان‌گونه که در بخش ۲.۳ اشاره شد، تقسیم‌بندی ماتریس‌های $SL(2, \mathbb{R})$ به سه‌گانه هذلولوی، بیضوی، و سهموی براساس عمل آن‌ها روی دیسک پوانکاره نیز قابل تعریف است.

مسئله ۱۳. برای $A \in SL(2, \mathbb{R})$ نشان دهید

- نگاشت φ_A دقیقاً دو نقطه ثابت دارد که هر دو مرز دیسک واحد قرار دارند اگر و تنها اگر A هذلولوی باشد؛
- نگاشت φ_A دقیقاً دو نقطه ثابت دارد که یکی درون و دیگری بیرون بستر دیسک واحد قرار دارند اگر و تنها اگر A بیضوی باشد؛
- نگاشت φ_A دقیقاً یک نقطه ثابت دارد که روی مرز دیسک پوانکاره قرار دارد اگر و تنها اگر A سهموی باشد.

درواقع می‌توان علاوه بر تحلیل نقاط ثابت نشان داد که در هر یک از حالات تحت اثر نگاشت



شکل ۴. (از راست به چپ) عمل ماتریس‌های بیضوی، سهموی، و هذلولوی روی \mathbb{D}

φ_A نقاط دیسک پوانکاره روی دایره یا خط‌هایی، که در شکل ۴ با نقطه چین مشخص شده‌اند، حرکت خواهند کرد.

۳.۵ ماتریس‌ها؛ عمل خطی روی \mathbb{R}^2 و عمل طولپایی‌های روی \mathbb{D}

منشأ اثبات‌هایی که در بخش ۶ به کمک هندسه هذلولوی برای قضیه‌های بخش‌های قبل ارائه می‌دهیم مشاهداتی است که عمل خطی ماتریس‌ها روی \mathbb{R}^2 را به عمل آن‌ها به‌عنوان طولپایی‌های جهت‌نگهدار \mathbb{D} مرتبط می‌کند. این ارتباط باید به‌گونه‌ای باشد که ترجمه مناسبی از مفاهیمی مثل نرم عملگری ماتریس، طول تصویر بردارها تحت اثر آن، و راستاهای با بیشترین انبساط و انقباض ارائه دهد.

کلید اصلی در این ارتباط این مطلب است که می‌توان به هر ماتریس در $SL(2, \mathbb{R})$ نقطه‌ای در \mathbb{D} نسبت داد که از طرفی سازگاری مناسبی با ضرب ماتریس‌ها دارد و از طرف دیگر مفاهیم ذکرشده برحسب آن نقطه تعبیر ساده‌ای دارند. در واقع به هر ماتریس $A \in SL(2, \mathbb{R})$ نقطه $\omega_A := \varphi_A^{-1}(0) \in \mathbb{D}$ را نسبت می‌دهیم. می‌توان با استفاده از ویژگی‌های نگاشت φ_A دید که خواص زیر برقرار است.

- برای هر نقطه $\omega \in \mathbb{D}$ می‌توان $A \in SL(2, \mathbb{R})$ یافت که $\omega_A = \omega$ ؛
- برای هر دو ماتریس $A, B \in SL(2, \mathbb{R})$ ، $\varphi_B(\omega_{AB}) = \omega_A$ ؛
- برای هر سه ماتریس $A, B, C \in SL(2, \mathbb{R})$ ، $\rho_{\mathbb{D}}(\omega_{AC}, \omega_{BC}) = \rho_{\mathbb{D}}(\omega_A, \omega_B)$ ؛
- $\omega_A = 0$ اگر و تنها اگر $\|A\| = 1$ یا به‌طور معادل ماتریس A دوران باشد؛
- برای دو ماتریس $A, B \in SL(2, \mathbb{R})$ ، $\omega_A = \omega_B$ اگر و تنها اگر ماتریس دوران R وجود داشته باشد که $A = RB$.

ادعا می‌کنیم بسیاری از ویژگی‌های عمل ماتریس A روی \mathbb{R}^2 برحسب ω_A قابل بیان است.

برای هر ماتریس $A \in \text{SL}(2, \mathbb{R})$ که ماتریس دوران نباشد، $s(A)$ و $u(A)$ را بردارهای واحدی تعریف می‌کنیم که

$$|A(u(A))| = \max \{|Av| : v \in \mathbb{R}^d, |v| = 1\},$$

$$|A(s(A))| = \min \{|Av| : v \in \mathbb{R}^d, |v| = 1\}.$$

درواقع $s(A)$ و $u(A)$ بردارهای ویژه ماتریس متقارن $A^T A$ هستند.

به علاوه می‌توان ثابت کرد که (اگر A

ماتریس دوران نباشد) بردارهای $s(A)$ و

$u(A)$ با تقریب قرینه یکتا و بر هم عمودند.

این موارد از قضیه تجزیه مقادیر تکین برای

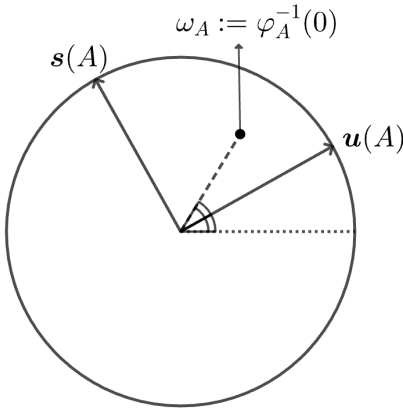
ماتریس A نتیجه می‌شود که بیان می‌کند

برای هر ماتریس $A \in \text{SL}(2, \mathbb{R})$ می‌توان

ماتریس‌های دوران R, R' و ماتریس قطری

$D \in \text{SL}(2, \mathbb{R})$ با درایه‌های قطری مثبت

یافت به طوری که $A = RDR'$.



شکل ۵

گزاره ۱.۵. برای هر $A \in \text{SL}(2, \mathbb{R})$ ،

$$\|A\| = \exp \frac{1}{\rho} \rho_{\mathbb{D}}(\omega_A, \circ). \tag{۳.۵}$$

به علاوه اگر $\omega_A \neq \circ$ و شناسه^۱ ω_A برابر θ باشد، $u(A) = \pm \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) \end{bmatrix}$ و $s(A) = \pm \begin{bmatrix} \cos(\theta/2 + \pi/2) \\ \sin(\theta/2 + \pi/2) \end{bmatrix}$

ملاحظه ۲.۵. طبق گزاره بالا برای هر ماتریس $A \in \text{SL}(2, \mathbb{R})$ که $\|A\| \neq 1$ نقطه متناظر با

A در صفحه مختلط ω_A نقطه‌ای در \mathbb{D} است که فاصله هذلولوی و اقلیدسی آن از مبدأ به ترتیب

$2 \ln \|A\|$ و $\frac{\|A\|^2 - 1}{\|A\|^2 + 1}$ است و شناسه آن برابر دو برابر زاویه بین خط گذرنده از بردار $u(A)$ با

محور x است (شکل ۵).

1. argument

حاصل ضرب تصادفی ماتریس‌ها/رجب‌زاده، رشادت، نصیری

اثبات گزاره ۱.۵. ابتدا توجه کنید که اگر $\|A\| = 1$ آن‌گاه $\omega_A = \circ$ و بنابراین درستی تساوی (۳.۵) واضح است. پس در ادامه فرض می‌کنیم $\|A\| < 1$. در این صورت طبق قضیه تجزیه مقادیر تکین می‌توان ماتریس‌های دوران R, R' و ماتریس قطری $D \in \text{SL}(2, \mathbb{R})$ با درایه‌های قطری مثبت را یافت طوری که $A = RDR'$. با توجه به اینکه ماتریس‌های دوران نرم بردارها را تغییر نمی‌دهند، داریم $\|A\| = \|RDR'\| = \|D\|$. از طرف دیگر، با توجه به ویژگی‌های ω_A ،

$$\omega_A = \omega_{RDR'} = \varphi_{R'}^{-1}(\omega_{RD}) = \varphi_{R'}^{-1}(\omega_D). \quad (۴.۵)$$

حالا چون R' یک ماتریس دوران است، $\varphi_{R'}(\circ) = \circ$ و لذا

$$\rho_{\mathbb{D}}(\omega_A, \circ) = \rho_{\mathbb{D}}(\varphi_{R'}^{-1}(\omega_D), \varphi_{R'}^{-1}(\circ)) = \rho_{\mathbb{D}}(\omega_D, \circ).$$

بنابراین کافی است درستی رابطه (۳.۵) را برای ماتریس‌های قطری ثابت کنیم. اگر $D = \begin{bmatrix} \lambda & \\ & \lambda^{-1} \end{bmatrix}$ که در آن $\lambda > 1$ ، به وضوح $\|D\| = \lambda$. در این حالت می‌توان به‌سادگی نشان داد که $\omega_D = \frac{\lambda^2 - 1}{\lambda^2 + 1}$. پس

$$\rho_{\mathbb{D}}(\omega_D, \circ) = \ln \frac{1 + \frac{\lambda^2 - 1}{\lambda^2 + 1}}{1 - \frac{\lambda^2 - 1}{\lambda^2 + 1}} = 2 \ln \lambda.$$

همچنین توجه کنید که اگر R' دوران به اندازه زاویه α باشد، طبق بخش الف تمرین ۱۲،

$\varphi_{R'}(z) = e^{i\alpha} z$ و با توجه به (۴.۵) آرگومان ω_A برابر 2α است. به علاوه

$$\mathbf{u}(A) = \pm \begin{bmatrix} \cos(-\alpha) \\ \sin(-\alpha) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{s}(A) = \pm \begin{bmatrix} \cos(-\alpha + \frac{\pi}{4}) \\ \sin(-\alpha + \frac{\pi}{4}) \end{bmatrix},$$

□

و به این ترتیب حکم ثابت می‌شود.

با توجه به قسمت (ب) از مسئله ۱۱، همه طولپایه‌های جهت‌نگهدار \mathbb{D} نسبت به متریک $\rho_{\mathbb{D}}$ در همه نقاط صفحه مختلط به‌استثنای حداکثر یک نقطه تعریف شده و تمام‌ریخت‌اند. از آنجاکه همه این نگاشت‌ها روی بستر دایره واحد تعریف شده‌اند، می‌توان عمل آن‌ها روی مرز دایره را، که به‌نوعی نقاط مرزی صفحه هذلولوی هستند، مطالعه و بررسی کرد. با مشتق‌گیری از فرمول $\varphi(z) = \beta \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z}$ و با توجه به اینکه $\varphi(\alpha) = \circ$ نتیجه می‌گیریم که برای هر $\xi \in \mathbb{C}$ که $|\xi| = 1$

$$|\varphi'(\xi)| = \frac{1 - |\varphi^{-1}(\circ)|^2}{|\xi - \varphi^{-1}(\circ)|^2}. \quad (۵.۵)$$

برای جزئیات بیشتر به [۱۷] رجوع کنید. تساوی بالا با توجه به $\omega_A = \varphi_A^{-1}(0)$ نتیجه می‌دهد که برای هر $A \in \text{SL}(2, \mathbb{R})$ و هر $\xi \in \mathbb{C}$ که $|\xi| = 1$,

$$|\varphi'_A(\xi)| = \frac{1 - |\omega_A|^2}{|\xi - \omega_A|^2}. \quad (6.5)$$

در ادامه سعی می‌کنیم نرم عمل حاصل از یک ماتریس $A \in \text{SL}(2, \mathbb{R})$ روی بردارهای \mathbb{R}^2 را به نرم مشتق تابع φ_A روی نقاط دایره واحد در صفحه مختلط مربوط کنیم. برای این منظور به هر بردار $v = \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ نقطه $\xi_v := e^{2i\theta}$ در صفحه مختلط را نسبت می‌دهیم که نرم واحد دارد.

گزاره ۳.۵. برای هر ماتریس $A \in \text{SL}(2, \mathbb{R})$ و هر بردار $v \in \mathbb{R}^2$ با شرط $|v| = 1$,

$$|Av| = |\varphi'_A(\xi_v)|^{-1/2}.$$

اثبات. ابتدا توجه کنید که اگر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ و $v = \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix}$ ، با توجه به اتحادهای مثلثاتی $\cos(2\theta)$ و $\sin(2\theta)$ برحسب $\cos(\theta)$ و $\sin(\theta)$,

$$\begin{aligned} |Av|^2 &= (a \cos \theta + b \sin \theta)^2 + (c \cos \theta + d \sin \theta)^2 \\ &= \frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}{2} + \cos(2\theta) \frac{a^2 + c^2 - b^2 - d^2}{2} + \sin(2\theta)(ab + cd). \end{aligned}$$

حالا کافی است به کمک رابطه (۶.۵) $|\varphi'_A(e^{2i\theta})|^{-1}$ را محاسبه کنیم و نشان دهیم که با عبارت بالا برابر است. \square

۴.۵ روابطی بین ضرب ماتریس‌ها و هندسه هذلولوی

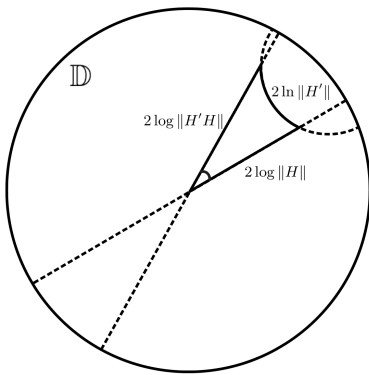
اثبات‌هایی که در بخش ۶ برای قضیه‌های ۲.۴ و ۹.۳ خواهیم آورد وام‌دار اثبات‌های موجود در [۵]، [۷]، ضمیمه A، و [۲۴]، برای این قضیه‌ها است، که در مقاله حاضر با استدلال‌های جدید برای گام‌های مختلف به زبان واحدی درآمده است. اثبات قضیه ارگودیک ضربی را بعدتر به کمک ارتباط بین هندسه هذلولوی و عمل خطی ماتریس‌ها، که در بخش قبل بیان شد، و گزاره‌هایی در ارتباط با رفتار حدی حاصل ضربی ماتریس‌ها و ترکیب طولپایی‌های متناظر می‌آوریم و در بخش بعد قضیه‌های اصلی را به سادگی از این احکام نتیجه می‌گیریم. ابتدا به لم زیر، که مشابه لم ۱ در [۲۴] است، می‌پردازیم.

اگر مرکز دیسک پوانکاره را با O نشان دهیم، برای هر دو نقطه $u, u' \in \mathbb{D}$ که مخالف O باشند، زاویه $\widehat{uOu'}$ را با نماد $\angle(u, u')$ نمایش می‌دهیم.

لم ۴.۵. برای هر $K > 1$ و هر $H, H' \in \text{SL}(2, \mathbb{R})$ که $K \leq \|H\|, \|H'H\|$ داریم

$$\angle(u(H), u(H'H)) \leq C_K \frac{\|H'\|^2}{\|H\|^2},$$

که در آن $C_K = 4\pi K^4(K^4 - 1)^{-1}$.



شکل ۶

توجه کنید که شرط‌های $\|H'H\|, \|H\| \neq 1$ نتیجه می‌دهند که ماتریس‌های H و $H'H$ دوران نیستند و بنابراین $u(H'H)$ و $u(H)$ تعریف می‌شوند و مخالف مرکز \mathbb{D} هستند.

لازم است توجه کنیم که در [۲۴، لم ۱] با اثباتی متفاوت، تخمین مشابهی برای زاویه بین بردارهای $u(H), u(H'H)$ آمده است تحت این فرض که $\|H\|, \|H'\|$ با تقریب مضرب یک عدد ثابت قابل مقایسه باشند. هرچند [۲۴، لم ۱] برای اثبات قضیه

۹.۳ کفایت می‌کند، اما برای تحلیل رشد نرم بردارها و اثبات قضیه ارگودیک ضربی کافی نیست.

اثبات لم ۴.۵. دو ماتریس $H, H' \in \text{SL}(2, \mathbb{R})$ را در نظر بگیرید با این شرط که $1 < K < \|H\|, \|H'H\|$. حال به مثلث هذلولوی با رأس‌های $\omega_H, \omega_{H'H}$ توجه کنید (شکل ۶).

$$\rho_{\mathbb{D}}(\omega_{H'H}, \omega_H) = \rho_{\mathbb{D}}(\omega_{H'H}, \circ) = 2 \ln \|H'H\|, \rho_{\mathbb{D}}(\omega_H, \circ) = 2 \ln \|H\|$$

$$\rho_{\mathbb{D}}(\omega_{H'}, \circ) = 2 \ln \|H'\|$$

به‌علاوه دقت کنید که اگر اختلاف شناسه‌های ω_H و $\omega_{H'H}$ را α بنامیم، زاویه مورد نظر برابر 2α است. حال برای تخمین زاویه α به کمک طول سه ضلع مثلث از قانون کسینوس‌ها در هندسه هذلولوی استفاده می‌کنیم. این قضیه بیان می‌کند که در هر مثلث هذلولوی که طول اضلاع آن نسبت به متریک هذلولوی برابر a, b, c هستند، اگر زاویه روبه‌رو به ضلع a برابر α باشد، تساوی زیر برقرار است

$$\cosh a = \cosh b \cosh c - \sinh b \sinh c \cos \alpha. \tag{۷.۵}$$

با جانشانی طول اضلاع مثلث در فرمول (۷.۵) خواهیم داشت

$$\cos \alpha = \frac{(\|H'H\|^4 + 1)(\|H\|^4 + 1)}{(\|H'H\|^4 - 1)(\|H\|^4 - 1)} - \frac{2(\|H'\|^4 + 1)\|H\|^2\|H'H\|^2}{(\|H\|^4 - 1)\|H'\|^2(\|H'H\|^4 - 1)} \quad (۸.۵)$$

$$> 1 - 2 \frac{\|H'\|^4 + 1}{\|H'\|^2} \frac{\|H\|^2}{\|H\|^4 - 1} \frac{\|H'H\|^2}{\|H'H\|^4 - 1} \quad (۹.۵)$$

برای یافتن تقریبی ساده‌تر برای $\cos \alpha$ از رابطه بالا، توجه کنید که چون $\|H'\|^4 + 1 \leq \|H'\|$ از طرف دیگر، برای هر $K \leq x$ ، $K \leq x^2/(x^4 - 1) \leq K_*/x^2$ ، $K \leq \|H\|$ ، $\|H'H\|$ اگر $K^4/(K^4 - 1)$ با شرط $K_* =$ نتیجه می‌گیریم

$$\cos \alpha > 1 - \frac{4K_*^2\|H'\|^2}{\|H\|^2\|H'H\|^2}. \quad (۱۰.۵)$$

حال چون برای هر $\alpha \in (-\pi, +\pi)$ نابرابری $\cos \alpha \leq 1 - \alpha^2/\pi^2$ برقرار است، و نتیجه می‌گیریم

$$\alpha < \frac{2K_*\pi\|H'\|}{\|H\|\|H'H\|}. \quad (۱۱.۵)$$

بالاخره، از نامساوی $\|H\| \leq \|(H')^{-1}\| \cdot \|H'H\|$ و با توجه به قسمت (الف) از مسئله ۱، نتیجه می‌شود که

$$\frac{1}{\|H'H\|} \leq \frac{\|(H')^{-1}\|}{\|H\|} = \frac{\|H'\|}{\|H\|}$$

□

و با توجه به نابرابری (۱۱.۵) حکم مورد نظر نتیجه می‌شود.

قضیه ۵.۵. فرض کنید X یک فضای متریک فشرده و $f : X \rightarrow X$ و $A : X \rightarrow \text{SL}(2, \mathbb{R})$ توابعی پیوسته باشند. در این صورت برای $x \in X$ اگر $\lambda := \liminf \frac{1}{n} \ln \|A_n(x)\|$ آن‌گاه

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln |\omega_{A_{n+1}}(x) - \omega_{A_n}(x)| \leq -2\lambda. \quad (۱۲.۵)$$

به‌علاوه اگر $\lambda > 0$ دنباله $\{\omega_{A_n(x)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ در متریک اقلیدسی به نقطه‌ای مثل $\omega^s(x)$ از مرز \mathbb{D} همگراست و

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln |\omega^s(x) - \omega_{A_n}(x)| \leq -2\lambda. \quad (۱۳.۵)$$

$$\begin{aligned}
 |\omega_m - \omega_n| &\leq \sum_{j=n}^{m-1} |\omega_{j+1} - \omega_j| \\
 &\leq \sum_{j=n}^{m-1} e^{-2j(\lambda-\epsilon)} \leq \sum_{j=n}^{\infty} e^{-2j(\lambda-\epsilon)} = \frac{e^{-2n(\lambda-\epsilon)}}{1 - e^{-2(\lambda-\epsilon)}}.
 \end{aligned}$$

پس با ثابت نگه داشتن n و میل دادن m به بی نهایت نتیجه می‌گیریم

$$|\omega^s - \omega_n| \leq \frac{e^{-2n(\lambda-\epsilon)}}{1 - e^{-2(\lambda-\epsilon)}}.$$

پس

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln |\omega^s - \omega_n| \leq -2(\lambda - \epsilon).$$

□

و با میل دادن ϵ به صفر رابطه (۱۳.۵) نتیجه می‌شود.

۶ اثبات قضیه‌های اصلی

در این بخش با استفاده از نتایج بخش قبل، قضیه ۲.۴ (قضیه ارگودیک ضربی) و قضیه ۹.۳ درباره معادل بودن رشد یکنواخت‌نمایی و رفتار یکنواخت‌هذلولوی را اثبات می‌کنیم.

۱.۶ اثبات قضیه ارگودیک ضربی

اثبات قضیه ۲.۴. برای هر $n \in \mathbb{N}$ ، تابع $\phi_n : X \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$ را به ضابطه $\phi_n(x) = \rho_{\mathbb{D}}(\omega_{A_n(x)}, \circ)$ تعریف کنید. در این صورت با توجه به نابرابری مثلثی نسبت به متریک هذلولوی نتیجه می‌شود که برای هر $x \in X$ و هر $m, n \in \mathbb{N}$ ،

$$\phi_{n+m}(x) \leq \phi_m(x) + \phi_n(f^m(x)).$$

پس با توجه به قضیه ۱.۴ تابع اندازه‌پذیر $\lambda : X \rightarrow \mathbb{R}$ وجود دارد که برای μ -تقریباً هر $x \in X$ ،

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \rho_{\mathbb{D}}(\omega_{A_n(x)}, \circ) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \phi_n(x) = 2\lambda(x). \quad (۱.۶)$$

مجموعه x ‌هایی را که تساوی بالا برای آن‌ها برقرار است با \mathcal{R} نمایش می‌دهیم. توجه کنید که چون توابع ϕ_n همگی نامنفی هستند، برای هر $x \in \mathcal{R}$ ، $\lambda(x) \geq 0$. این رابطه با توجه به (۳.۵) بخش

حاصل ضرب تصادفی ماتریس‌ها/رجب‌زاده، رشادت، نصیری

اول حکم قضیهٔ ارگودیک ضربی نتیجه می‌شود. ضمناً به دلیل تعریف فاصلهٔ هذلولوی در \mathbb{D} ، برای هر $x \in \mathcal{R}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln(1 - |\omega_{A_n(x)}|) = -2\lambda(x), \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} |\omega_{A_n(x)}| = 1. \quad (۲.۶)$$

از این دو رابطه نتیجه می‌شود که

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln(1 - |\omega_{A_n(x)}|^2) = -2\lambda(x). \quad (۳.۶)$$

حالا طبق گزارهٔ ۳.۵ و رابطهٔ (۶.۵) برای هر $v \in \mathbb{R}^2$ با شرط $|v| = 1$

$$|A_n(x)v|^2 = \frac{1}{|\varphi'_{A_n(x)}(\xi_v)|} = \frac{|\xi_v - \omega_{A_n(x)}|^2}{1 - |\omega_{A_n(x)}|^2}. \quad (۴.۶)$$

اگر $\lambda(x) > 0$ ، طبق قضیهٔ ۵.۵ دنبالهٔ $\{\omega_{A_n(x)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ به نقطه‌ای از مرز \mathbb{D} همگراست که آن را با نماد $\omega^s(x)$ نمایش می‌دهیم. اگر $\xi_v \neq \omega^s(x)$ ،

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln |\xi_v - \omega_{A_n(x)}|^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln |\xi_v - \omega^s(x)|^2 = 0,$$

و بنابراین

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln |A_n(x)v| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n} \ln \frac{|\xi_v - \omega_{A_n(x)}|^2}{1 - |\omega_{A_n(x)}|^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n} \ln |\xi_v - \omega_{A_n(x)}|^2 \\ &\quad - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n} \ln(1 - |\omega_{A_n(x)}|^2) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n} \ln |\xi_v - \omega_{A_n(x)}|^2 + \lambda(x) = \lambda(x). \end{aligned}$$

در حالتی که $\xi_v = \omega^s(x)$ ، از آنجاکه $1 - |\omega_{A_n(x)}| \leq |\omega_{A_n(x)} - \omega^s(x)|$ ، طبق رابطهٔ (۴.۶)،

$$|A_n(x)v|^2 \geq \frac{1 - |\omega_{A_n(x)}|}{1 + |\omega_{A_n(x)}|},$$

که این با توجه به (۲.۶) نتیجه می‌دهد $-\lambda(x)$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln |A_n(x)v| \geq -\lambda(x)$$

از طرف دیگر، با استفاده از رابطه (۱۳.۵)،

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln |A_n(x)v| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n} \ln \frac{|\xi_v - \omega_{A_n(x)}|^2}{1 - |\omega_{A_n(x)}|^2} \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n} \ln |\xi_v - \omega_{A_n(x)}|^2 \\ &\quad - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n} \ln (1 - |\omega_{A_n(x)}|^2) \\ &\leq -\lambda(x). \end{aligned}$$

پس

$$-\lambda(x) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln |A_n(x)v| \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln |A_n(x)v| \leq -\lambda(x),$$

که نتیجه می‌دهد حد $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln |A_n(x)v|$ وجود دارد و برابر $-\lambda(x)$ است.

در حالتی که $\lambda(x) = 0$ ، برای هر $v \in \mathbb{R}^2$ با شرط $|v| = 1$ داریم $1 - |\omega_{A_n(x)}| \leq 2$ | $\xi_v - \omega_{A_n(x)}$ | پس با توجه به رابطه (۴.۶)،

$$\frac{1}{1 + |\omega_{A_n(x)}|} \leq |A^n(x)v|^2 \leq \frac{2}{1 - |\omega_{A_n(x)}|^2},$$

و این با توجه به (۲.۶) نتیجه می‌دهد که برای هر v ، $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln |A_n(x)v| = 0$. □

۲.۶ اثبات معادل بودن رشد یکنواخت‌نمایی و رفتار یکنواخت‌هذلولوی

در بخش ۳.۳ اثبات یک طرف از حکم قضیه ۹.۳ بیان شد مبنی بر اینکه هر دستگاه خطی دارای رفتار یکنواخت‌هذلولوی دارای رشد یکنواخت‌نمایی نرم است. در اینجا به اثبات طرف دیگر این قضیه می‌پردازیم.

اثبات قضیه ۹.۳. برای هر $n \in \mathbb{N}$ تابع $\omega_n : X \rightarrow \mathbb{C}$ را با ضابطه $\omega_n(x) := \omega_{A_n(x)}$ تعریف می‌کنیم. به سادگی از تعریف دیده می‌شود این تابع پیوسته است. حال اگر فرض کنید عددهای حقیقی مثبت $0 < C$ و $1 < \lambda$ با شرط $C\lambda^n < \|A_n(x)\|$ باشند در این صورت برای هر $x \in X$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \|A_n(x)\| \geq \ln \lambda > 0.$$

بنابراین طبق قضیه ۵.۵، برای هر $x \in X$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln |\omega_{n+1}(x) - \omega_n(x)| \leq -2 \ln \lambda < 0.$$

با توجه به فشردگی X ، به کمک رابطه بالا می‌توان نشان داد که $\sup_{x \in X} |\omega_{n+1}(x) - \omega_n(x)|$ وقتی $n \rightarrow \infty$ به‌طور نمایی به صفر میل می‌کند. از این نتیجه می‌شود که دنباله توابع ω_n به‌طور یکنواخت به تابع پیوسته‌ای مثل ω^s میل می‌کند. حال برای هر بردار $v \in \mathbb{R}^2$ با نرم واحد با شرط $\xi_v = \omega(x)$ با استدلال مشابه گزاره قبلی نتیجه می‌شود که $|A_n(x)v|$ وقتی $n \rightarrow \infty$ به‌طور نمایی به صفر میل می‌کند. به‌این ترتیب نتیجه می‌شود که دستگاه خطی (f, A) رفتار یکنواخت‌هذلولوی دارد. \square

مراجع

- [1] Avila, A., Density of positive Lyapunov exponents for $SL(2, \mathbb{R})$ -cocycles, *J. Amer. Math. Soc.*, **24** (2011), no. 4, 999-1014.
- [2] Avila, A., Bochi, J., A formula with some applications to the theory of Lyapunov exponents, *Israel J. Math.*, **131** (2002), 125-137.
- [3] Avila, A., Bochi, J., On the subadditive ergodic theorem (2009), available at <http://mat.puc-rio.br/~jairo/docs/kingbirk.pdf>.
- [4] Avila, A., Bochi, J., Yoccoz, J-C, Uniformly hyperbolic finite-valued $SL(2, \mathbb{R})$ -cocycles, *Comment. Math. Helv.*, **85** (2010), no. 4, 813-884.
- [5] Bochi, J., Lyapunov Exponents for $Mob(\mathbb{D})$ -cocycles: a proof of Oseledets theorem in dimension 2, available at <http://mat.puc-rio.br/~jairo/docs/oseldim2.pdf>.
- [6] Bochi, j., Genericity of zero Lyapunov exponents, *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **22** (2002), no. 6, 1667-1696.
- [7] Bochi, J., Viana, M., Lyapunov exponents: how frequently are dynamical systems hyperbolic?, in *Modern Dynamical Systems and Applications*, M. Brin, et al., eds., Cambridge University Press, 2004, 271-297.
- [8] Bochi, J., Viana, M., The Lyapunov exponents of generic volume-preserving and symplectic maps, *Ann. of Math.*, (2) **161** (2005), no. 3, 1423-1485.
- [9] Bonatti, C., Diaz, L., Viana, M., *Dynamics Beyond Uniform Hyperbolicity: A Global Geometric and Probabilistic Perspective*, Springer, Berlin, 2005.
- [10] Brin, M., Stuck, G., *Introduction to Dynamical Systems*, Cambridge University Press, Cambridge, 2015.
- [11] Furstenberg, H., Kesten, H., Products of random matrices, *Ann. Math. Statist.*, **31** (1960), 457-469.
- [12] Katok, A., Hasselblatt, B., *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems*, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [13] Kifer, Y., Perturbations of random matrix products, *Z. Wahrscheinlichkeitstheor. Verw. Geb.*, **61** (1982), 83-95.
- [14] Kingman, J. F. C., The ergodic theory of subadditive stochastic processes, *J. R. Stat. Soc. Ser. B Stat. Methodol.*, **30** 1968, 499-510.
- [15] Mané, R., An ergodic closing lemma, *Ann. of Math.*, (2) **116** (1982), 503-540.

- [16] Nassiri, M., Rajabzadeh, H., Reshadat, Z., Quasi-conformal cocycles: Stability and prevalence, 2024 (preprint).
- [17] Nichols, P. J., *The Ergodic Theory of Discrete Groups*, Cambridge University Press, Cambridge, 1989.
- [18] Oseledets, V. I., A multiplicative ergodic theorem: Lyapunov characteristic numbers for dynamical systems, *Trans. Moscow Math. Soc.*, **19** 1968, 197-231.
- [19] Viana, M., Almost all cocycles over any hyperbolic system have nonvanishing Lyapunov exponents, *Ann. of Math.*, (2) **167** (2008), no. 2, 643-680.
- [20] Viana, M., *Lectures on Lyapunov Exponents*, Cambridge University Press, Cambridge, 2014.
- [21] Viana, M., Oliveira, K., *Foundations of Ergodic Theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 2016.
- [22] Palis, J., de Melo, W., *Geometric Theory of Dynamical Systems: An Introduction*, New York, Springer-Verlag, 1982.
- [23] Palis, J., Takens, F., I, Cambridge University Press, Cambridge, 1993.
- [24] Yoccoz, J.-C., Some questions and remarks about $SL(2, \mathbb{R})$ cocycles, in *Modern Dynamical Systems and Applications*, M. Brin, et al., eds., Cambridge University Press, 2004, 447-458.

حسام‌الدین رجب‌زاده: پژوهشگاه دانش‌های بنیادی، پژوهشکده ریاضیات

رایانامه: rajabzadeh@ipm.ir

زهرا رشادت: پژوهشگاه دانش‌های بنیادی، پژوهشکده ریاضیات

رایانامه: zahrareshadat@ipm.ir

میثم نصیری: پژوهشگاه دانش‌های بنیادی، پژوهشکده ریاضیات

رایانامه: nassiri@ipm.ir

Random Product of Matrices

M. Nasiri¹, H. Rajabzadeh²✉, Z. Reshadat³

^{1,2,3} School of Mathematics, IPM, Iran

Abstract. In this article, we study the product of 2×2 matrices from both geometric and probabilistic perspectives, with a particular focus on the concept of growth. By exploring the connections between the multiplicative properties of matrices and the composition of isometries of hyperbolic geometry, new proofs for several classical theorems are presented.

Keywords: dynamical systems, hyperbolic geometry, linear cocycles, growth, random product of matrices, Lyapunov exponents

Article history: Received 23 May March 2024; Accepted 18 September 2024

Article type: original

1. nassiri@ipm.ir

2. rajabzadeh@ipm.ir

3. zahrareshadat@ipm.ir