فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۴۰ (بهار ۱۳۸۷) صص. ۱ تا ۱۴

قضیهٔ گلدی

احمد حقانی و منصور معتمدی

مقدمه

در دانش نامهٔ آزاد اینترنتی ویکی پدیا[1] و در ذیل «قضیهٔ گلدی» چنین آمده است: «در ریاضیات، قضیهٔ گلدی یک نتیجهٔ ساختاری بنیادی در نظریهٔ حلقه‌هاست که در دههٔ ۶۰–۱۹۵۰ میلادی توسط آلفرد گلدی[2] (۲۰۰۵–۱۹۲۰) به اثبات رسید. قضیهٔ گلدی در مورد حلقه‌های نویتریِ دارای حلقهٔ کسرها که یک حلقهٔ نیم سادهٔ آرتینی و از این رو بنا بر قضیهٔ آرتین ــ ودربورن ساختار شناخته شده‌ای دارند، نتیجه‌ای را به دست می‌دهد.... قضیهٔ گلدی امروزه بدین گونه بیان می‌شود که حلقه‌های نیم اوّل راستِ گلدی تنها آن‌هایی‌اند که دارای حلقهٔ کسرهای راست نیم سادهٔ آرتینی هستند». نویسندگان این مقاله که هر دوی آن‌ها در مکتب گلدی در دانشگاه لیدز درس خوانده‌اند برای ادای دین به مرحوم استاد گلدی نوشتار حاضر را تقدیم خوانندگان فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی می‌نمایند. اهمیت، تأثیر و راه‌گشایی قضیهٔ گلدی در جبر، به ویژه در نظریهٔ حلقه‌ها فراوان بوده است و به طور قطع انجام پژوهش‌های بسیاری در جبر و دستیابی به نتایج مهمی در این زمینه را باید مدیون قضیهٔ گلدی دانست. بیان وابستگی نتایج دیگران به قضیهٔ گلدی و نقش آن در تحولات بعدی که تا به امروز ادامه دارد، خود می‌تواند مضمون نوشتهٔ بلند دیگری باشد. در واقع دانشگاه واریک در فروردین ۱۳۸۵ در بزرگ‌داشت گلدی میزبان کنفرانسی سه روزه بود که در آن شرکت کنندگان و از جمله احمد حقانی غالباً به ارائهٔ آن بخش از دستاوردهای خود پرداختند که به قضیهٔ گلدی وابسته بود. در این مقاله می‌کوشیم زمینه‌های پیدایش قضیهٔ گلدی و مفاهیمی را که در اثبات آن به کار رفته است، آشکار سازیم. در این مورد فرض می‌شود که خواننده با قضیهٔ ساختاری آرتین ــ ودربورن آشنایی دارد. در آن چه که در پی خواهد آمد مقصود از حلقهٔ کسرها، حلقهٔ کسرهای کلاسیک است که لزوماً با حلقهٔ کسرها به معنایی دیگر یکی نیست.

۱. حلقهٔ کسرها

در سال‌های پایانی سدهٔ نوزدهم میلادی گرل[3] از اعضای مکتب امی نویتر[4] مفهوم کسر در اعداد

1) Wikipedia 2) A.W. Goldie 3) H. Grell 4) E. Noether

را به دامنه‌های صحیح دلخواه، یعنی حلقه‌های تعویض‌پذیر بدون مقسوم علیه صفر، تعمیم داد. هیأت کسرهای دامنهٔ صحیح R شامل تمام دسته‌های هم‌ارزی است که با تعریف یک رابطهٔ هم‌ارزی بر حاصل ضرب دکارتی به‌دست می‌آیند. بدین ترتیب ساختن هیأت کسرها به همان سادگی ساختن $\mathbb{Q}$ از $\mathbb{Z}$ است. مهم‌تر آن که این هیأت همواره وجود دارد و به طور یکتا مشخص می‌شود. در مورد حلقه‌های تعویض‌ناپذیر، اما، چنین نیست و وجود حلقهٔ کسرها وابسته به برقراری شرطی موسوم به شرط اُرِ[1] است. پیش از بیان و شرح این شرط، یادآوری چند تعریف ضروری می‌نماید.

تعریف. از این پس فرض می‌کنیم حلقهٔ R واحددار است و لزوماً تعویض پذیر نیست. عضو $a \neq ۰$ را یک مقسوم علیه راست صفر می‌نامیم، هرگاه $۰ \neq b \in R$ وجود داشته باشد که $ba = ۰$. اگر $۰ \neq c \in R$ وجود داشته باشد که $ac = ۰$، گوییم a یک مقسوم علیه چپ صفر است. عضوی را که مقسوم علیه راست صفر و هم‌چنین مقسوم علیه چپ صفر نباشد، یک عضو منظم می‌نامیم. حلقهٔ R را که لزوماً تعویض پذیر نیست یک دامنه می‌نامیم، هرگاه هر عضوِ ناصفرِ آن منظم باشد.

وان دِر واردن[2]، پس از حضور در کلاس‌های درس امی نویتر در گوتینگن، در ۱۹۲۷ میلادی کتاب معروف خود «جبر مدرن»[۲۱] را به رشته تحریر در آورد. وی در بخشی از این کتاب، پس از اثبات این که هر دامنهٔ صحیح تعویض پذیر را می‌توان در یک هیأت نشاند، این پرسش را مطرح می‌کند که آیا هر دامنهٔ تعویض ناپذیر را می‌توان در یک حلقهٔ تقسیمی نشاند؟ ملسف[3] که توسط کلموگرف[4] از این پرسش آگاه شده بود توانست به آن پاسخ دهد. نامبرده نخست مثالی از یک دامنهٔ تعویض پذیر ارائه داد که نیم گروه ضربی آن را نمی‌توان در یک گروه نشاند [۱۷] ملسف در مقاله‌ای که دو سال پس از آن منتشر کرد یک شرط لازم و کافی برای نشاندن یک نیم گروه در یک گروه را به دست آورد. وان دِر واردن در ویرایش دوم کتاب خود در یک پانوشت با ارجاع به مقالهٔ ملسف یادآور شده است که دامنه‌ها را لزوماً نمی‌توان در یک حلقهٔ تقسیمی نشاند. چنین دامنه‌هایی را امروزه دامنه‌های ملسف می‌نامند. به هر حال مثال ملسف به ویژه نشان می‌دهد که یک دامنه لزوماً دارای حلقهٔ کسرها نیست.

اُرِ با رهیافتی متفاوت توانست یک شرط لازم و کافی برای وجود حلقهٔ کسرها بیابد [۱۹]. پیش از ادامه لازم است به تعریف حلقهٔ کسرها بپردازیم.

تعریف. حلقهٔ Q یک حلقهٔ کسرهای (راست) حلقهٔ R نامیده می‌شود هرگاه

الف) $R \subseteq Q$،

ب) هر عضو منظم c دارای وارون $c^{-۱}$ در Q باشد،

پ) هر عضو Q را بتوان به شکل $ac^{-۱}$ نوشت که در آن a و c عضوهای R هستند و c در R منظم است.

1) Ore 2) B. L. Vander Warden 3) Malsev 4) Kolmogrov

اینک اگر توجه کنیم که $c^{-1}a$ یک عضو Q است، باید a_1 و c_1 (منظم) در R وجود داشته باشند که $c^{-1}a = a_1c_1^{-1}$، یا این که $ca_1 = ac_1$. بنابراین یک شرط لازم برای وجود حلقهٔ کسرها برقراری شرطی است بنام شرط اُرِ که می‌توان آن را به شکل زیر بیان کرد.

شرط اُرِ. اگر S مجموعهٔ عضوهای منظم حلقهٔ R، $a \in R$ و $d \in S$، آن گاه

$$aS \cap dR \neq \emptyset$$

اهمیت شرط اُرِ در کافی بودن آن برای وجود حلقهٔ کسرهاست.

قضیهٔ ۱. حلقهٔ R دارای حلقهٔ کلی کسرهای (راست) است اگر و تنها اگر در شرط اُرِ صدق کند.
این قضیه، نخست برای دامنه‌ها اثبات شد و سپس دبریل[1] آن را در حالت کلی اثبات کرد [۸]. خواننده برای اثبات می‌تواند مرجع [۱] را ببیند. اگر R یک دامنه باشد، شرط اُرِ هم ارز با این گزاره است که برای عضوهای ناصفر a و c اشتراک دو ایدال راست اصلی aR و cR ناصفر باشد. در این حالت هر عضو ناصفر حلقهٔ R در حلقهٔ کسرهایش وارون پذیر است، پس حلقهٔ کسرهای یک دامنه، به شرط وجود، یک حلقهٔ تقسیمی است. اینک لازم است دامنه‌ای مثال زده شود که در شرط اُرِ صدق نمی‌کند.

مثال. فرض کنیم K یک هیأت و $K < x, y >$ جبر تعویض‌ناپذیر و آزاد روی K باشد. می‌توان نشان داد که اشتراک دو ایدال $xK < x, y >$ و $yK < x, y >$ برابر با صفر است و از این رو این حلقه در شرط اُرِ صدق نمی‌کند.
از طرف دیگر اُرِ مثال‌هایی از دامنه‌های تعویض ناپذیر ارائه داد که درشرط اُرِ صدق می‌کنند [۱۹].

این دامنه‌ها را توسیع‌های اُرِ می‌نامند. فرض کنیم R یک دامنه و d یک مشتق آن باشد. یک مشتق حلقهٔ R یک هم‌ریختی گروه جمعی R است که تساوی $d(aa') = ad(a') + a'd(a)$ برای هر دو عضو a و a' برقرار باشد. اُرِ نشان داد که برای هر مشتق dی حلقهٔ R حلقه‌ای به‌نام حلقهٔ چندجمله‌ای‌های کج $R[y, d]$ ساخته می‌شود که هر عضو آن ترکیب خطی متناهی از توان‌های y و ضرایب در R است. این ضرایب در سمت راست نوشته می‌شوند. هم چنین ry برابر با $yr + d(r)$ تعریف می‌شود. اُرِ نشان داد که اگر R یک حلقهٔ تقسیمی باشد، آن گاه $R[y, d]$ در شرط اُرِ صدق می‌کند و از این رو دارای حلقهٔ کسرهاست. بدیهی است که $R[y, d]$ یک توسیع R است. نتیجه اُرِ بعدها به شکل تعمیم یافته زیر در آمد.

قضیهٔ ۲. هرگاه حلقهٔ R در شرط اُرِ صدق کند، آن گاه برای هر مشتق dی حلقهٔ R، $R[y, d]$ نیز در شرط اُرِ صدق می‌کند. برای اثبات (رک ۴). یکی از مثال‌های توسیع اُرِ و شاید با اهمیت‌ترین آن‌ها جبر کوانتومی یا جبر وایل[2] است.
مثال (جبر کوانتومی یا جبر وایل) فرض کنیم k یک هیأت با مشخصهٔ صفر باشد و $R = k[x]$. اگر d

1) P. Dubreil 2) Wyle

مشتق‌گیری معمولی نسبت به x باشد، توسیع $R[y,d]$ که می‌توان آن را با $k[x,y,d]$ نشان داد جبر کوانتومی یا جبر وایل نامیده می‌شود. سبب پیدایش و نام‌گذاری این جبر دنباله‌ای از مقاله‌هاست که در آن دیراک[۱] سعی کرده است، با تعبیر خود، مکانیک کوانتومی را توضیح دهد [۷]. هم‌چنین لیتلوود[۲] نشان داده است که شرط اُرِ در مورد این جبر برقرار است [۱۹].

در پی‌گیری مطالعهٔ حلقهٔ کسرها و اثبات قضیهٔ گلدی توجه به تعریف زیر ضروری است.

تعریف. ایدال راست E در حلقهٔ R را اساسی می‌نامیم و می‌نویسیم $E \leq_e R$، هرگاه اشتراک E با هر ایدال ناصفر R، ناصفر باشد.

قضیهٔ ۳. فرض کنیم R یک حلقه و S مجموعهٔ عضوهای منظم آن باشد. اگر R در شرط اُرِ صدق کند و Q حلقهٔ کسرهای آن باشد، آن‌گاه

الف) اگر $d_1, d_2, \ldots, d_n \in S$، آن گاه $d_1R \cap d_2R \cap \ldots \cap d_nR$، شامل یک عضو منظم است،

ب) برای $x_1, x_2, \ldots, x_n \in S$ و $c_1, c_2, \ldots, c_n \in R$، عضو $d \in S$ وجود دارد که برای هر $1 \leq i \leq n$، $x_i = c_i d^{-1}$ (وجود مخرج مشترک)،

پ) اگر A یک ایدال راست R باشد، آن‌گاه $AQ = \{ad^{-1} : a \in A, d \in S\}$،

ت) اگر B یک ایدال راست Q باشد، آن‌گاه $B = (B \cap R)Q$،

ث) اگر A و B ایدال‌های راست R باشند، آن‌گاه $\{AQ \cap BQ = (A \cap B)Q$،

ج) اگر E یک ایدال راست R باشد، آن‌گاه $E \leq_e R$، اگر و تنها اگر $EQ \leq_e Q$.

اثبات. الف) کافی است حالت $n = 2$ را بررسی کنیم. فرض کنیم $d = d_2$ و $a = d_1$ در این صورت به موجب برقراری شرط اُرِ $c \in S$ و $b \in R$ وجود دارد که $d_1c = db = d_2b$. بنابراین $d_1c \in d_1R \cap d_2R$ یک عضو منظم است.

ب) نخست توجه می کنیم که (الف) نشان می‌دهد اگر $d \in d_1R \cap d_2R \cdots \cap d_nR$ آن گاه $d = d_1a_1 = d_2a_2 = \cdots = d_na_n$ و بنابراین $d_i^{-1} = a_id^{-1}$، $1 \leq i \leq n$. اگر قرار دهیم $x_1 = a_1d_1^{-1}$، $x_2 = a_2d_2^{-1}$، $\cdots$، $b_ix_n = a_2d_2^{-1}$ وجود دارد که $d_i^{-1} = b_id^{-1}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ از این جا نتیجه می‌گیریم که $x_n = a_nb_nd^{-1}$ $\cdots$ و $x_2 = a_2b_2d^{-1}$ و $x_1 = a_1b_1d^{-1}$.

پ) فرض کنیم $x \in AQ$، پس $x = \sum_{i=1}^{n} a_ix_i$ که در آن $x_i \in Q$ و $a_i \in A$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. برای هر i، $b \in R$ و $d \in S$ هست که $x_i = b_id^{-1}$، پس $x = (a_ib_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)d^{-1}$.

ت و ث). اثبات را به عهده خواننده می‌گذاریم.

ج) فرض کنیم $E \leq_e R$ و $B \neq 0$. یک ایدال راست Q باشد. به موجب (ت)، $B = (B \cap R)Q$.

1) P. A. M. Dirac 2) D. E. Littlewood

پس $(B\cap R)\cap E\neq O$ که نتیجه می‌دهد $(B\cap R)Q\cap EQ\neq O$ زیرا که بنا به (ث) $(B\cap R)Q\cap EQ=(B\cap R\cap E)Q$ در نتیجه $EQ\leq_e Q$. به عکس فرض کنیم $EQ\leq_e Q$ که در آن E یک ایدآل راست R است. اگر $A\neq O$ یک ایدآل راست R باشد، $AQ\cap EQ\neq O$ اما $AQ\cap EQ=(A\cap E)Q\neq O$ و بنابراین $A\cap E\neq O$.

۲. پژوهش‌های جیکوبسن[1]

در دههٔ چهارم سدهٔ بیستم میلادی، یکی از وجوه پژوهش در نظریهٔ حلقه‌های تعویض ناپذیر مطالعهٔ ساختاری حلقه‌ها بدون گذاشتن هیچ قیدی بر روی آن‌ها بوده است. در این مورد موفق‌ترین رهیافت از آنِ جیکوبسن بود. گلدی در پژوهش‌های نخستین خود تحت تأثیر آثار جیکوبسن به ویژه کتاب ماندگار وی [۱۴] قرار داشت. یکی از مفاهیم اصلی کارهای جیکوبسن را می‌توان این گونه بیان کرد: فرض کنیم R یک حلقه و M یک ایدآل راست ماکسیمال آن باشد، قرار می‌دهیم.

$$(M:R)=\{x\in R:Rx\subseteq M\}$$

ایدآل دو طرفهٔ I را یک ایدآل اولیهٔ راست R می‌نامیم هرگاه مشمول در یک ایدآل (راست) ماکسیمال M باشد به طوری که $I=(M:R)$. حلقهٔ R را یک ایدآل اولیهٔ (راست) می‌نامیم، هرگاه ایدآل صفر یک ایدآل اولیهٔ (راست) آن باشد. به سبب این که $(M:R)$ همواره یک ایدآل دو طرفهٔ R است، دانسته می‌شود که حلقه‌های ساده، یعنی حلقه‌های ناصفری که تنها ایدآل ناصفرشان R است، حلقه‌های اولیه هستند. می‌توان نشان داد که جبر کوانتومی یک حلقهٔ ساده است. یکی از مهم‌ترین ایدآل‌های دو طرفه در هر حلقه اشتراک تمام ایدآل‌های اولیهٔ (راست) آن حلقه است. این ایدآل را رادیکال جیکوبسن R می‌نامند و آن را با $J(R)$ نشان می‌دهند. جیکوبسن حلقه‌هایی را که در آن $J(R)=0$، نیم‌ساده می‌نامد. به سبب این که همواره $R/J(R)$ حلقه‌ای نیم‌ساده است، با هر حلقه می‌توان یک حلقهٔ نیم‌ساده ساخت. جیکوبسن هم‌چنین نشان داد که هر حلقهٔ نیم‌ساده را می‌توان در حاصل ضرب مستقیم حلقه‌های اولیه نشاند به طوری که تصویر آن بر روی هر یک از عامل‌های ضرب، پوشا باشد (زیر حاصل ضرب مستقیم). از ابداعات دیگر جیکوبسن، تعریف یک توپولوژی بر روی مجموعهٔ تمام ایدآل‌های اولیهٔ حلقهٔ R است. این توپولوژی با توپولوژی زاریسکی که بر مجموعه ایدآل‌های اول یک حلقهٔ تعویض‌پذیر تعریف می‌شود مطابقت دارد. جیکوبسن این توپولوژی را فضای ساختاری R نامیده است. نخستین مقالهٔ گلدی در نظریهٔ حلقه‌ها مطالعهٔ خواص حلقه‌های نیم ساده است که در آن بررسی فضاهای ساختاری یک حلقه را به مطالعهٔ فضای ساختاری ایدآل‌های دوطرفهٔ آن (به عنوان حلقه‌های بدون واحد) کاهش می‌دهد. این نتایج در کتاب جیکوبسن با پانوشتی که به کارهای گلدی استناد می‌شود درج شده است.[۱۴]

1) N. Jacobson

۳. دامنه‌های نویتری

در اوایل دههٔ پنجم سدهٔ بیستم میلادی باز هم علاقه به حلقهٔ کسرها در محافل جبری به وجود آمده بود. تاماری[1] نشان داد که جبر پوشی[2] یک جبر لیِ متناهی ـ بعد در شرط اُرِ صدق می‌کند و از این رو حلقهٔ کسرهای آن وجود دارد [۲۰]. جبر پوشی نقش اساسی در مطالعهٔ نظریهٔ جبرهای لی دارد و خواص جبری آن شناخته شده است. این جبرها دامنه‌های نویتری نیز هستند. در همان سال‌ها آمیتسر[1] نشان داد که هر دامنه اتحاد چندجمله‌ای[2] (حلقه‌هایی که بسیاری از خواص حلقه‌های تعویض‌پذیر را دارا هستند) در شرط اُرِ صدق می‌کنند [۳]. در کنگرهٔ بین‌المللی ریاضی‌دانان که در سال ۱۹۵۴ میلادی در آمستردام هلند برگزار شد، جیکوبسن، در ملاقات با گلدی، وی را تشویق کرد که حدسیهٔ معروف خود راجع به حلقه‌های نویتری را ثابت کند.

حدسیه جیکوبسن. اگر R یک حلقهٔ نویتری راست و چپ باشد، آن گاه $\bigcap_{n=1}^{\infty}(J(R)^n = 0$. این حدسیه در مورد حلقه‌های تعویض پذیر R درست است (قضیهٔ اشتراک کرول[3]). هرشتاین[4] با ارائهٔ یک مثال نشان داده که اگر R نویتری راست باشد، اما نویتری چپ نباشد این حدسیه برای آن درست نیست و مسألهٔ اصلی هنوز مفتوح است. در بررسی این حدسیه لازم بود که به مطالعهٔ حلقه‌های اولیهٔ نویتری پرداخته شود. گلدی در این مسیر ابتدا دامنه‌های سادهٔ نویتری را در نظر گرفت. وی با کارهای اُرِ، مقالهٔ لیتلوود، جبر کوانتومی و نتایج تاماری آشنا بود و توانست با استفاده از شرط اُرِ نشان دهد که هر دامنهٔ نویتری دارای حلقهٔ کسرهاست. گلدی این نتیجه را در سال ۱۹۵٦ اثبات کرد. در این جا اثباتی ساده از آن آورده می‌شود. هم چنان که پیش‌تر گفته شد، برقراری شرط اُرِ در دامنه‌ها بدین معنی است که برای هر دو عضو ناصفر a و c، $aR \cap cR \neq 0$. فرض کنیم $aR \cap cR = 0$. نشان می‌دهیم که در این صورت مجموع $aR + caR + c^2aR + \ldots c^naR$ برای هر $n \geq 1$ یک مجموع مستقیم است. در واقع اگر این گونه نباشد، $r_0, r_1, \ldots, r_n$ در R وجود دارند که همگی صفر نیستند و

$$ar_0 + car_1 + c^2ar_2 + \ldots + c^nar_n = 0$$

پس

$$car_1 + c^2ar_2 + \ldots + c^nar_n = -ar_0$$

اما فرض شده است که $aR \cap cR = 0$، پس $r_0 = 0$ و

$$car_0 + car_1 + c^2ar_2 + \ldots + c^nar_n = 0$$

از آن جا که $c \neq 0$ و R یک دامنه است، می‌توان c را حذف کرد. پس

1) D. Tamari 2) envelopping algebra 3) S. A. Amitsur 4) polynomial identity domain

3) W. Krull 4) I. N. Herstein

$$ar_0 + ca_2 + \cdots + c^{n-1}ar_n = 0$$

و ادعا به استقرا اثبات می‌شود. اما وجود این مجموع‌های مستقیم ایجاب می‌کند که زنجیر افزایشی

$$aR \subset aR \oplus caR \subset aR \oplus caR \oplus c^2aR \subset \cdots$$

اکید و از این رو R نویتری نباشد که چنین نیست.

گلدی در ملاقاتی که با براور[۵]، از پیش‌گامان مطالعهٔ جبرهای متناهی بعد و کاشف نمایش‌های مدولار داشت این نتیجه را به اطلاع وی رساند و توضیح داد که در گام بعد باید ماتریس‌ها بر دامنه‌ها را در نظر گرفت و بدین ترتیب مورد تشویق و تأیید قرار گرفت. آن چنان که گلدی خود بارها به همکاران و دانشجویان خود اظهار می‌داشت، پس از کار مستمر بر روی نمایش حلقه‌ها سرانجام وجود عضوهای منظم در ایدآل‌های راست اساسی مطرح می‌شود. از این پس ادامهٔ کار چندان مشکل نبوده است.

۴. حلقه‌های اول

حلقهٔ اول حلقه‌ای است که حاصل ضرب هر دو ایدآل ناصفر آن، ناصفر باشد. آشکار است که دامنه‌ها، حلقه‌های اولند، لیکن مثال حلقهٔ ماتریس‌های $n \times n$ $(n > 1)$ با درآیه‌ها در یک حلقهٔ تقسیمی، نشان می‌دهد که، حلقه‌های او ل لزوماً دامنه نیستند. می‌دانیم حلقهٔ ماتریس‌ها با انتخاب درآیه‌ها از یک دامنه، حلقه‌های اول هستند. اما آیا هر حلقهٔ اول به این شکل است. پاسخ منفی است. گلدی نشان داد که حلقهٔ کسرهای یک حلقهٔ اول نویتری وجود دارد و افزون بر آن حلقه‌ای ساده و آرتینی است. برای مثال $M_n(\mathbb{Q})$ حلقهٔ کسرهای $M_n(\mathbb{Z})$ است. در ادامه، فرض می‌کنیم که R یک حلقهٔ اول نویتری راست است. اگر R دارای حلقهٔ کلاسیک کسرها باشد باید در شرط اُرِ صدق کند. بنابراین اگر $c \in R$، a و c منظم باشد، $c_1 \in R$ و a_1 وجود دارند که $ca_1 = ac_1$ و c_1 منظم است، به ویژه اگر $a \neq 0$، $ca_1 = ac_1$ یک عضو ناصفر $cR \cap aR$ است. بنابراین در ابتدا، اگر بتوان، باید ثابت کرد که: اگر c یک عضو منظم حلقهٔ R و اگر $a \in R$، آن گاه

$$cR \cap aR \neq 0 \qquad (*)$$

درستی این بیان، پیش‌تر در مورد دامنه‌ها به اثبات رسیده است. آیا نباید با رهیافت مشابهی به اثبات آن پرداخت؟ پاسخ مثبت است. نخست یکی از مفاهیم اصلی را که در اثبات قضیهٔ گلدی به کار می‌رود و علاوه بر آن به تنهایی در گسترش و تعمیق نظریهٔ حلقه‌ها و مدول‌ها مؤثر بوده مورد توجه قرار می‌دهیم [۹].

تعریف. ایدآل U در حلقهٔ R یکنواخت نامیده می‌شود هرگاه اشتراک هر دو ایدآل ناصفر R، مشمول در U ناصفر باشد.

1) R. Brauer

از استدلال بیان شده در بخش ۳ چنین نتیجه می‌شود که هر ایدآل ناصفر یک دامنهٔ نویتری، یکنواخت است، اما در مورد حلقه‌های اول نویتری نتیجهٔ ضعیف‌تری وجود دارد.

لم ۱. هر ایدآل راست و ناصفر یک حلقهٔ اول نویتری شامل یک ایدآل راست یکنواخت است.

اثبات. فرض کنیم چنین نیست و I یک ایدآل ناصفر راست حلقهٔ R است که شامل هیچ ایدآل راست یکنواختی نیست. پس I شامل دو ایدآل ناصفر I_1 و I'_1 است که $I_1 \cap I'_1 = 0$. اینک I_1 شامل ایدآل راست یکنواختی نیست، زیرا در غیر این صورت I شامل چنین ایدآل راستی خواهد بود که تناقص است. پس باید دو ایدآل راست I_2 و I'_2 مشمول در I_1 وجود داشته که $I_2 \cap I'_2 = 0$ به علاوه چون $I_1 \cap I'_1 = 0$ و $I'_2 \subset I_1$، نتیجه می‌گیریم که $I'_1 + I'_2$ یک مجموع مستقیم است. با ادامهٔ این روند ایدآل‌های راست I'_1، I'_2، I'_3، $\cdots$ ساخته می‌شوند به طوری که

$$I'_1 \oplus I'_2 \oplus I'_3 \oplus \dots$$

یک مجموع مستقیم نامتناهی از ایدآل‌های راست ناصفر است که با شرط نویتری بودن R تناقص دارد.

اینک فرض کنیم I یک ایدآل راست ناصفر R و Ω مجموعهٔ تمام مجموع‌های مستقیم ایدآل‌های راست یکنواخت در I باشد. بنا به لم قبل Ω تهی نیست و از این رو باید دارای یک عضو ماکسیمال باشد. بنابراین I شامل یک مجموع مستقیم متناهی ماکسیمال است. در این جا ماکسیمال بدین معنی است که نمی‌توان جمع‌وند دیگری به آن افزود تا مجموع جدید هم‌چنان مستقیم باشد. از آن جا که هر مجموع مستقیم ماکسیمال از ایدآل‌های راست یکنواخت R باید در R اساسی باشد، روشی برای ساختن ایدآل‌های راست اساسی به دست می‌آید.

گلدی نشان داد که در حلقهٔ R تعداد جمع‌وندها در هر مجموع مستقیم ماکسیمال ایدآل‌های راست یکنواخت، مشمول در I یک ناوردای I است. اثبات این ادعا شبیه اثبات ناوردایی عدد اصلی یک پایه برای فضاهای برداریِ متناهی ـ بعد است. این ناوردا، اینک در متون به بعد یکنواخت، بعد گلدی یا رتبه گلدی موسوم شده است [۲] ـ ادعای $(*)$ اینک با توجه لم زیر به اثبات می‌رسد.

لم ۲. اگر c یک عضو منظم حلقهٔ R باشد، آن گاه cR یک ایدآل راست اساسی R است.

اثبات فرض کنیم c یک عضو منظم R باشد. از آن جا که R نویتری فرض شده است، بعد گلدی آن متناهی و برابر با عدد n است. پس ایدآل‌های راست یکنواخت U_1، U_2، $\dots$، U_n وجود دارند به طوری که $U_1 \oplus U_2 \dots \oplus U_n$ یک مجموع مستقیم ماکسیمال است. اما c یک عضو منظم و هر U_i یکنواخت می‌باشد پس $cU_i \neq 0$، $i = 1, \dots, n$ و از طرفی هر ایدآل ناصفر راستِ مشمول در cU_i باید به شکل cI باشد که $I \subset U$ یک ایدآل راست R است. چنان‌چه cJ ایدآل ناصفر راست دیگری مشمول در U_i باشد، $I \cap J \neq 0$، زیرا که U_i یکنواخت است. به سبب منظم بودن c داریم

$$cI \cap cJ = c(I \cap J) \neq 0$$

بنابراین cU_1، cU_2، $\cdots$ ایدآل‌های راست یکنواخت R هستند. از آن جا که بعد گلدی R برابر با n

فرض شده است، نتیجه می‌گیریم که $cU_1 \oplus cU_2 \oplus \ldots \oplus cU_n$ یک مجموع مستقیم ماکسیمال دیگر در R است. حال فرض کنیم L یک ایدآل راست R باشد، در این صورت L شامل یک ایدآل راست یکنواخت مانند V بوده و از آن جا که $V \neq 0$ و $cU_1 \oplus cU_2 \oplus \ldots \oplus cU_n$ ماکسیمال است داریم

$$0 \neq (cU_1 \oplus cU_2 \ldots \oplus cU_n) \cap cv \subseteq cR \cap L$$

که لم را اثبات می‌کند.

لم فوق ایجاب می‌کند که اگر c یک عضو منظم باشد $cR \cap aR \neq 0$ و در نتیجه عضوهای ناصفر $b_2 \in R$ و b_1 وجود دارند به طوری که $cb_1 = ab_2$. اما برای اثبات برقراری شرط، باید بتوان b_1 و b_2 را چنان انتخاب کرد که b_2 در R منظم باشد، به عبارت دیگر باید نشان دهیم که

$$E = \{x \in R : ax \in R\}$$

شامل یک عضو منظم است. اما E یک ایدآل راست R است. از طرفی به سبب منظم بودن c، با توجه به لم قبل به سادگی می‌توان نشان داد که E نیز در R اساسی است. برای نیل به هدف نهایی اثبات حدسیه زیر کافی به نظر می‌رسد.

حدسیه: هر ایدآل راست اساسی شامل یک عضو منظم است.

باید توجه کرد که انتظار داریم Q حلقهٔ کسرهای R، یک حلقهٔ ساده و آرتینی باشد. فرض کنیم E یک ایدآل راست اساسی R باشد، در این صورت بنا به قضیهٔ ۱ (ج) EQ یک ایدآل راست اساسی Q است. به سبب این که Q یک حلقهٔ ساده و آرتینی است، هر ایدآل راست آن یک جمع‌وند آن است، از این رو اساسی بودن QE نتیجه می‌دهد که $EQ = Q$، به ویژه به ازای یک $a \in E$، $ac^{-1} = 1$ و در نتیجه $c = a \in E$. اینک قضیهٔ زیر اثبات شده است.

قضیهٔ ۴. اگر حلقه R دارای حلقهٔ کسرها باشد که ساده و آرتینی است آن گاه هر ایدآل راست اساسی R شامل یک عضو منظم است.

۵. نتیجهٔ اساسی

هدف اصلی این بخش اثبات حدسیهٔ بخش قبل است. یادآوری چند تعریف ضروری به نظر می‌رسد. فرض کنیم a یک عضو حلقهٔ R باشد. پوچ‌ساز راست a ایدآل راست $r(a) = \{x \in R : ax = 0\}$ است. پوچ ساز چپ a به طریق مشابه تعریف می‌شود. آشکار است که a منظم است اگر و تنها اگر $r(a) = l(a) = 0$. عضو a را پوچ‌توان می‌نامیم هرگاه به ازای یک عدد طبیعی مانند n، $a^n = 0$. ایدآل I را پوچ می‌نامیم، هرگاه هر عضو آن پوچ‌توان باشد. از اثبات لم بعد صرف‌نظر می‌کنیم.

لم ۳. اگر R یک حلقهٔ اول نویتری باشد، شامل ایدآل پوچ ناصفر نیست.

لم ۴. فرض کنیم R یک حلقهٔ اول نویتری باشد. اگر a یک عضو R باشد، عدد طبیعی n وجود دارد که $a^nR \oplus r(a^n)$ در R اساسی است.

اثبات. به علت نویتری بودن R، عدد طبیعی N وجود دارد که برای هر $n > N$، $r(a^n) = r(a^{n+1})$. نشان می‌دهیم که برای چنین nای، مجموع $a^nR \oplus r(a^n)$ یک مجموع مستقیم است. عضو $x \in R$ را چنان انتخاب می‌کنیم که $a^nx \in r(a^n)$، پس $a^{2n}x = 0$ و به موجب ماکسیمال بودن $r(a^n)$، داریم $x \in r(a^{2n}) = r(a^n)$. از این جا لازم می‌آید که $a^n = 0$ پس برای هر $n \leq N$، $a^nR \cap r(a^n) = 0$. اینک باید نشان دهیم که $a^nR \oplus r(a^n)$ در R اساسی است. اگر چنین نباشد، ایدآل راست ناصفر I وجود دارد که $I \cap (a^nR \oplus r(a^n)) = 0$. در این صورت مجموع

$$a^nI + a^{2n}I + \cdots + a^{kn}I$$

برای هر $k \geq 0$ یک مجموع مستقیم است. برای اثبات این ادعا، به استقرا فرض می‌کنیم برای $k - 1$ مجموع داده شده مستقیم باشد و $x \in a^nI \cap (a^{2n}I + \cdots + a^{kn}I)$، آن گاه $x = a^ny = a^{2n}z$ که در آن $y \in I$ و $z \in R$. بنابراین $a^n(y - a^nz) = 0$ و $y - a^nz \in r(a^n)$، از این قرار

$$y \in I \cap (a^nR + r(a^n)) = 0$$

به ویژه $x = a^ny = 0$. از آن جا که حلقهٔ نویتری نمی‌تواند شامل یک مجموع مستقیم نامتناهی باشد، اثبات کامل است.

اینک تمام ابزارهای لازم برای اثبات حدسیه را در اختیار داریم.

قضیهٔ ۵. ایدآل راست و ناصفر I در حلقهٔ اول و نویتری R اساسی است اگر و تنها اگر شامل یک عضو منظم باشد.

اثبات. بنا به لم ۲ شرط کافی است. فرض کنیم E یک ایدآل راست ناصفر R باشد. از لم ۳ نتیجه می‌شود که E شامل یک عضو غیرپوچ توان x است. به علاوه $n \geq 0$ وجود دارد که $x^nR \cap r(x^n) = 0$. فرض کنیم $a_1 = x^n$ در این صورت $r(a_1) \cap E = 0$ یا $r(a_1) \cap E \neq 0$. در حالت دوم استدلال را با $r(a_1) \cap E = 0$ تکرار و $a_2 \in r(a_1) \cap E$ را چنان انتخاب می‌کنیم که $a_2 \cap r(a_2) = 0$. شرایط انتخاب a_1 و a_2 ایجاب می‌کند که مجموع

$$a_1R + a_2R + (r(a_1) \cap r(a_2) \cap E)$$

یک مجموع مستقیم باشد. اگر $r(a_1) \cap r(a_2) \cap E \neq 0$، روند فوق را ادامه می‌دهیم. در مرحلهٔ kام مجموع مستقیم

$$a_1R \oplus \cdots \oplus a_kR \oplus (r(a_1) \cap \cdots r(a_k) \cap E)$$

که در آن $0 \neq a_k \in r(a_1) \cap \cdots r(a_{k-1}) \cap E$ به دست می‌آید. به سبب نویتری بودن R این روند باید در مرحله‌ای مثلاً در مرحلهٔ kام متوقف شود، یعنی

$$r(a_1) \cap r(a_k) \cap E \neq 0$$

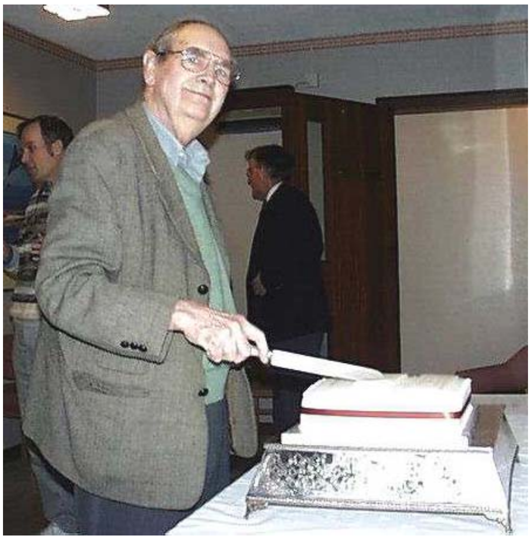
اگر فرض کنیم که E اساسی است، خواهیم داشت

$$r(a_1) \cap \cdots \cap r(a_k) = 0$$

قرار می‌دهیم $c_1 = a_1 + a_2 + \cdots a_k$. از مستقیم بودن $a_1R \oplus \cdots \oplus a_kR$ نتیجه می‌شود که

$$r(c_1) = r(a_1) \cap \cdots r(a_k) = 0$$

به موجب لم ۴ به ازای nای، $c_1^nR \oplus r(c_1^n)$ یک ایدآل راست اساسی است. فرض کنیم $c = c_1^n$. به علت این که $r(c_1^n) = 0$ داریم $r(c) = r(c_1) = 0$. نشان می‌دهیم که هم‌چنین $l(c) = 0$. اگر $0 \neq z \in l(c)$ آن‌گاه $r(z)$ شامل ایدآل راست اساسی $cR \oplus r(c)$ است و از این رو خود یک ایدآل راست اساسی است. مجدداً لم را این بار برای z به کار می‌بریم و نتیجه می‌گیریم که برای عدد طبیعی m، $z^mR \cap r(z^m) = 0$. به سبب این که $r(z) \subseteq r(z^m)$ و $r(z)$ اساسی است، نتیجه می‌گیریم که $z^m = 0$. بنابراین تمام عضوهای $l(c)$ پوچ‌توان هستند. بنا به لم ۳، $l(c) = 0$ و c یک عضو منظم E می‌باشد.



آلفرد گلدی در مراسم بزرگداشت ۸۰ سالگی

۶. حلقه‌های گلدی

از آن چه که تاکنون بیان و ثابت شد نتیجه می‌شود که حلقهٔ کسرهای یک حلقهٔ اولِ نویتری وجود دارد. گلدی علاوه بر این نشان داد که این حلقه، ساده و آرتینی است. اثبات این قسمت به مطالب دیگری نیاز دارد که از پرداختن به آن صرف نظر می‌کنیم. در مورد عکس این نتیجه چه

می‌توان گفت؟ یعنی اگر حلقهٔ کسرهای حلقه‌ای موجود، ساده و نیم‌آرتینی هم باشد، آیا حلقه اول و نویتری است؟ پاسخ منفی است. گلدی نشان داد که می‌توان توصیف کاملی از حلقه‌هایی که حلقهٔ کسرهای آن وجود دارد، ساده و آرتینی است به دست داد. اگر به اثبات مطالب توجه کنیم، دانسته می‌شود که از ویژگی نویتری بودن برای اطمینان از برقراریِ دو شرط استفاده شده و از آن دو شرط بقیهٔ نتایج به دست می‌آیند. این دو شرط عبارتند از

۱) هر مجموعِ مستقیم ایدآل‌های راستِ ناصفرِ حلقه، متناهی است.

۲) شرط فزاینده روی ایدآل‌های راست پوچ‌ساز وجود دارد.

گلدی در مقاله‌ها و در کلاس‌های درس خود، حتی پس از سالیان طولانی با تواضع کامل چنین حلقه‌هایی را حلقه‌های دارای شرط (۱) و (۲) می‌نامید. دیگر ریاضی‌دانان آن‌ها را حلقه‌های گلدی نامیدند. اکنون می‌توان قضیه را در حالت کلی آن چنین بیان کرد.

قضیه ٦. حلقهٔ R دارای حلقهٔ کسرهای ساده و آرتینی است اگر و تنها اگر R اول و گلدی باشد.

قضیهٔ فوق محتوای کامل قضیه‌ای نیست که در [۹] به اثبات رسیده است. زیرا گلدی فرض کرده بود که R دارای حلقهٔ کسرهای راست و چپ است. بنابراین مشابه شرط‌های (۱) و (۲) نیز باید برقرار باشد. لازم به ذکر است که لزور[۱] و کروا[۲] قضیه فوق را در ۱۹۵۹ اثبات کرده‌اند. چنان چه به اثبات‌های بیان شده توجه کنیم درمی‌یابیم که از شرط اول بودن تنها از نداشتن ایدآل پوچ‌توان ناصفر استفاده شده است. ایدآل I در حلقهٔ R را پوچ‌توان می‌نامیم هرگاه به ازای عدد طبیعی مانند n، $I^n = ۰$. حلقهٔ R نیم اول نامیده می‌شود هرگاه ایدآل صفر تنها ایدآل پوچ‌توان آن باشد. گلدی در ۱۹٦۰ قضیهٔ فوق را به شکل زیر تعمیم داد.

قضیهٔ ۷ (قضیه گلدی). حلقهٔ R دارای حلقهٔ کسرهای نیم ساده و آرتینی است اگر و تنها اگر نیم اول و گلدی باشد.

مراجع

[۱] جان بیچی، دروس مقدماتی حلقه‌ها و مدول‌ها، ترجمه احمد حقانی، انتشارات دانشگاه صنعتی اصفهان، ۱۳۸۲.

[۲] م. معتمدی، بعد فضای برداری و بعد گلدی، نشر ریاضی ۱۳۷۱، ۲۲—۱۸.

[3] A. S. A. Amitsur, Prime rings having polynomial identities with arbitrary coefficients, Proc, London Mathematical. Soc. (3)(17) (1967), 470-486.

[4] P. M. Cohn, Algebra Vol 2. John Wiley & Sons, 1977.

1) C. Lesieur 2) R. Croisot

[5] S. C. Coutinho and J. C. McConell. The quest for the quotient rings (of non-commutative rings), Amer. Math. Monthly 110 (2003), 298-313.

[6] S. C. Coutinho, Quotient rings of non-commutative rings in the first half of the 20^{th} century, Archive for history of exact sciences, vol. 58 number 3, March 2004, 225-281.

[7] P. A. M. Dirac, On Quantum Algebra, Roy. Soc. Proc. A, 110 (1926) 412-418.

[8] P. Dubreil, Sur les problem d'immersion et theorie des modules, C. R. Acad. Sci, Paris 216 (1943) 625-627.

[9] A. W. Goldie, The structure of prime rings with ascending chain conditions, Proc. London Math. Soc., 8(1958) 581-608.

[10] A. W. Goldie, Semiprime rings with maximal conditions, Proc. London Math. Soc, 10 (1960) 201-209.

[11] H. Grell. Beziehungen Zwichen Idealen Verchiedover Ringen, Math. Ann., 97 (1927).

[12] N. Jacobson. A topology for the set of primitive ideals in arbitrary rings, Proc. Nat. Acad. Sci. 31 (1945), 333-338.

[13] N. Jacobson, The radical and semisimplicity for arbitrary rings, Amer. J. Math. 67 (1945) 300-320.

[14] N. Jacobson. The structure of rings, Amer. Math Soc. Providence (1956).

[15] C. Lesieur and r. Croisot. Sur les anneaux premiers noetheries a gouche. Ann. Ecole. Norm. Sup 76 (1959) 161-183.

[16] D. F. Littelwood, On the classification of algebras. Proc. London Math. Society (2) 35 (1953), 200-240.

[17] A. Malcev. On the immersion of an algebraic ring into a field. Math. Ann. 113 (1937), 686-691.

[18] Malcev. Über die Einbettung Von assoziation in Gruppen. rec. Math Moscou 6 (1939) 331-336.

[19] O. Ore, Theory of non-commutative polynomials. Ann. Math. 34 (1933), 480-508.

[20] D. Tomari, On the embedding of Brikhoff-Witt rings in quotient fields. Proc. Amer. Math. Soc., 4(1953), 197-202.

[21] B. L. Vander-Warden, Modern Algebra I, II (Berlin 1930,31).

[22] B. L. Vander-Warden, On the source of my book Modern Algebra, Historica Mathematica 2(1975) 31-40.

احمد حقانی
دانشگاه صنعتی اصفهان، دانشکده علوم ریاضی
aghagh@cc.iut.ac.ir

منصور معتمدی
دانشگاه شهید چمران اهواز، دانشکده علوم ریاضی
motamedi_m@scu.ac.ir