فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۴۰ (بهار ۱۳۸۷) صص. ۱۵ تا ۴۶

مسائل راهبردی در آنالیز همساز و کاربردهای آنها

علیرضا مدقالچی

چکیده

یکی از مسائل عمده در ریاضیات قرن هجدهم پیدا کردن معادلهٔ مسألهٔ فیزیکی ارتعاش یک فنر بود که منجر به معادلهٔ دیفرانسیل جزئی $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ (c ثابت است) شد و حل این معادله منجر به سری‌های فوریه شده است. سیر تاریخی این موضوع تا ۱۸۵۰ میلادی در اثر ماندگار بورکارت جمع‌آوری شده است. از این تاریخ به بعد گسترش وسیع سری‌های فوریه روی گروه دایره ($\mathbb{T}$) و گروه جمعی اعداد حقیقی ($\mathbb{R}$) متمرکز شده است. کتاب زیگموند کتاب استانداردی در مورد سری‌های فوریه روی $\mathbb{R}$ و $\mathbb{T}$ یعنی آنالیز همساز روی $\mathbb{R}$ و $\mathbb{T}$ است. بالاخره کتاب بوخنر اثری نفیس در مورد آنالیز فوریه روی $\mathbb{R}$ است. این کتاب حاوی محاسبات بسیار ارزنده‌ای است که هنوز هم بعد از پنجاه سال برای دانشجویان آنالیز باارزش هستند.

صدای تولید شده از ارتعاش یک تار، ستونی از هوا، ترکیبی از تعدادی از صداهای خالص یا «همساز» است. در مطالعات فیزیک ـ ریاضی قرن‌های هجدهم و نوزدهم تعیین این مؤلفه‌ها [آنالیز همساز] و بازسازی موسیقی حاصل از مؤلفه‌ها [ترکیب همساز] یکی از مسائل اکوستیک بوده است. چنین مسائلی در اکثر پدیده‌های فیزیکی که یا متناوب و یا دارای تناوب‌های پنهان، هستند وجود دارد. وینر بحث روشن‌گرانه‌ای در مورد کارهای فیزیک‌دانان دارد. او در مقالهٔ خود که در ۱۹۳۰ میلادی منتشر شد توابعی متناوب روی $\mathbb{R}$ و حتی توابعی از $L^2(\mathbb{R})$ را مورد مطالعه قرار داده است. تابع‌های روی $\mathbb{T}$ [توابع متناوب روی $\mathbb{R}$] و توابع روی $\mathbb{R}$ [تابع‌های با تناوب پنهان] در بعضی حالات روی $\mathbb{T}^n$ و $\mathbb{R}^n$ تحلیل و ترکیب را نشان می‌دهد. سری‌های فوریه روی $\mathbb{T}$ و تبدیل‌های فوریه روی $\mathbb{R}$ از این نوع مسائل هستند.

در آنالیز همساز مدرن، به جای $\mathbb{T}$ و $\mathbb{R}$ یک گروه توپولوژیک فشردهٔ موضعی G می‌نشیند و فضایی از تابع‌ها روی G مورد بحث قرار می‌گیرد.

قبلاً در دو مقالهٔ توصیفی تحت عناوین «آنالیز هارمونیک از کجا شروع شده و به کجا می‌رود» و «پژوهش در ریاضیات» در این مفاهیم سخن گفته‌ایم. در دوازدهمین سمینار آنالیز ریاضی در مقاله‌ای مروری در مورد ابرگروه‌های توپولوژیک بحث کرده‌ایم. در این مقاله آنالیز همساز را از منظر دیگری مورد بحث قرار می‌دهیم. آنالیز همساز نه تنها روی گروه‌های توپولوژیک، بلکه روی نیم‌گروه‌های توپولوژیک و ابرگروه‌های توپولوژیک و گروه‌واره‌ها کاملاً گسترش یافته است.

مبحث‌های مطالعهٔ آنالیز همساز به شرح زیر است و ما فقط دربارهٔ گروه‌ها، نیم‌گروه‌ها و ابرگروه‌ها بحث می‌کنیم.

الف) گروه‌های توپولوژیک

۱ — توسعهٔ آنالیز همساز بعد از مسألهٔ پنجم هیلبرت [هر گروه اقلیدسی موضعی یک گروه لی است] و نظریهٔ نمایش

۲ — وجود اندازهٔ پایای چپ [اندازهٔ هار] روی گروه‌های توپولوژیک فشردهٔ موضعی

۳ — نظریهٔ نمایش و کاربردهای آنها و کارهای ویل، فون نویمن و ویگنر

۴ — میانگین‌های پایا[1] و توابع تقریباً متناوب

۵ — جبرهای فون نویمن یا جبر عملگرها

٦ — جبرهای فوریه و فوریه استیلتیس

۷ — توابع تقریباً متناوب

ب) نیم گروه‌ها

ایدهٔ نیم‌گروه‌های جبری به زمان‌های دور و تعریف اعمال روی مجموعه‌ها برمی‌گردد، ولی ریشهٔ آنالیز روی نیم گروه‌ها را می‌توان در کارهای هارولد بور در سال‌های ۱۹۲۵ و ۱۹۲٦ یافت، زمانی که او توابع تقریباً متناوب را روی خط حقیقی سرشت نمایی کرد. در ۱۹۲۷ بوخنر سرشت‌نمایی تحلیلی از توابع تقریباً متناوب ارائه داد و سرانجام فون نویمن و بوخنر در ۱۹۳۴ نظریهٔ توابع تقریباً متناوب را روی گروه توپولوژیک دلخواه G توسیع دادند. در مبحث گروه‌ها به طور مفصل در این مورد بحث خواهیم کرد. بالاخره گسترش توابع تقریباً متناوب و فشرده‌سازی به نیم‌گروه‌ها باعث توسعهٔ نیم‌گروه‌های توپولوژیک شد، بعدها مفهوم فشرده‌سازی ضعیف مورد توجه قرار گرفت و ابرلین[2] اولین کسی است که در ۱۹۴۹ این مفهوم را روی نیم‌گروه‌ها توسعه داد. از آن زمان به بعد آنالیز روی نیم‌گروه‌ها به صورت یک رشتهٔ کامل با محتوی محض و کاربردی درآمده است.

1) invariant means 2) Eberlin

ج) ابر گروه‌های توپولوژیک

ایدهٔ ابرگروه‌های توپولوژیک به دهه‌های قبل برمی‌گردد ولی آنالیز همساز روی ابرگروه‌ها در واقع با مطالعهٔ فضای اندازه‌های بورل و منظم و تبدیل آن به یک جبر پیچشی روی G/H و $G//H$ با مقالهٔ مفصل جویت در ۱۹۷۵ و مقاله‌های دانکل و اسپکتر شروع شده است. این مقاله‌ها، به ویژه مقالهٔ جویت، آنالیز همساز روی گروه‌ها را تا اندازهٔ زیادی روی ابرگروه‌ها گسترش داده‌اند. از آن زمان به بعد مقاله‌های زیادی در این موضوع چاپ شده است.

د) گروه واره‌ها

مفهوم گروه‌واره در ۱۹۲۷ در کارهای براندت معرفی شد. در واقع، گروه‌واره کوچک‌ترین کاتگوری با وارون است. هر گروه یک گروه‌واره است ولی عکس آن درست نیست. اگر R یک نسبت هم‌ارزی روی مجموعهٔ X باشد، در این صورت R یک گروه‌واره با ضرب $(x,z) \longrightarrow ((x,y),(y,z))$ و وارون $(x,y)^{-1} = (y,x)$ است. امروزه محقق شده است که بین گروه‌واره‌ها، نیم‌گروه‌های وارون و جبرهای عمل‌گری رابطه‌های مهمی وجود دارد. در این مقاله، در این باره بحث نمی‌کنیم و خواستاران اطلاعات بیشتر در این زمینه را به کتاب آلن ـ پاترسون ارجاع می‌دهیم.

ه) نتیجه‌های جدید

در آخرین بخش مقاله نتیجه‌های جدید خود را در مورد تعمیم جبرهای فوریه و فوریه استیلتیس روی نیم‌گروه‌ها و ابرگروه‌ها ارائه می‌دهیم و میانگین‌پذیری جبرهایی را روی نیم‌گروه‌ها بررسی می‌کنیم. چند نتیجهٔ دیگر در مورد تانسور نیم‌گروه‌ها را می‌آوریم. سرانجام، مختلط‌سازی $L^1(G)$ را بررسی می‌کنیم. این نتیجه‌ها حاصل کار نگارنده با دانشجویان و همکاران است که در سال‌های ۲۰۰۴ و ۲۰۰۶ چاپ شده‌اند.

رده‌بندی موضوعی مقاله: 43.03، 43A05، 43A20، 43A30، 43A60، 43A65.

کلمات کلیدی: گروه توپولوژیک، نمایش، فشرده‌سازی، نیم گروه، ابرگروه، C^*-جبر گروهی، جبر فوریه، جبر فوریه استیلتیس، ابرگروه تانسوری.

۱. مقدمه

در مقالهٔ [۵۶] اشاره کردیم که ریشه‌های آنالیز همساز کلاسیک در حل معادلهٔ حرارت و متعلق به فوریه است. سیر تاریخی این موضوع تا ۱۸۵۰ در اثر ماندگار بورکات [10] مورد بررسی قرار گرفته است. کتاب‌های زیگموند [55] و بوخنر (نگاه کنید به [22] صفحهٔ ۲۸۲) را می‌توان آثاری نفیس در مورد آنالیز فوریه روی $\mathbb{R}$ دانست به ویژه کتاب ارزشمند بوخنر حاوی محاسبات بسیار

ارزشمندی است که هنوز هم بعد از پنجاه سال برای دانشجویان آنالیز مفید هستند. تعیین همسازی‌ها و ترکیب آنها یکی از مسائل مهم در آنالیز فوریه است که ریشه در مسایل فیزیکی و اکوستیک دارد. این مبحث منجر به بررسی تابع‌های متناوب و حتی تابع‌هایی در $L^۲(\mathbb{R})$ شده است که در سال ۱۹۳۰ در مقالهٔ وینر آمده است [52]. از این رو، می‌توان آنالیز همساز را بررسی جبرهای توابع روی $\mathbb{R}$ و $\mathbb{T}$ [دایره واحد] دانست.

در آنالیز همساز مدرن، به جای $\mathbb{R}$ و $\mathbb{T}$ گروه فشردهٔ موضعی G می‌نشیند و فضاها و جبرهای توابع روی G مورد بحث قرار می‌گیرند. امروزه بحث عمدهٔ آنالیز همساز بررسی این فضاها و یا جبرها مثل فضاها و یا جبرهای $L^۱(G)$، $L^p(G)$ $(۱ < p < \infty)$، $L^\infty(G)$، $M(G)$، $A(G)$، $VN(G)$، $L^p(G)\hat{\otimes}L^q(G)$ $(\frac{۱}{p} + \frac{۱}{q} = ۱)$، $\cdots$ است. مطالعهٔ فضاهای توابع روی نیم‌گروه‌ها، ابرگروه‌ها و گروه‌واره‌ها از دیگر پیشرفت‌های سال‌های اخیر است.

تعریف‌های مقدماتی

گروهG به همراه یک توپولوژی را یک گروه توپولوژیک می‌نامیم اگر اعمال جبری $(x, y) \longrightarrow xy$، $x \longrightarrow x^{-۱}$ نسبت به این توپولوژی پیوسته باشند. مثال‌های ساده عبارتند از $(\mathbb{R}, +, |\cdot|)$ [گروه جمعی $\mathbb{R}$ با توپولوژی معمولی]، $(\mathbb{T}, ., |\cdot|)$ [گروه ضربی دایره با توپولوژی معمولی]، گروه گسستهٔ $\mathbb{Z}$.

به طور مسلم مثال‌های گروه‌های توپولوژیک بسیار غنی‌تر از این مثال‌های ساده است. در واقع، اساس گروه‌های توپولوژیک، گروه‌های لی است که گروه‌هایی توپولوژیک با ساختار تحلیلی هستند. این گروه‌ها توسط سوفس‌لی و فلیکس کلاین و دیگران تحت عنوان «نظریهٔ گروه‌های پیوسته» مورد بررسی قرار گرفته‌اند.

از دیدگاه کلاین هر هندسه، فضای همگنی است که می‌توان در آن اشیاء را بدون تغییر شکل حرکت داد. در نتیجه، هر هندسه با یک گروه طولپایی مشخص می‌شود. این گروه‌ها، گروه‌های لی یا گروه تبدیلات هستند [6].

تعریف. اندازهٔ λ را روی یک گروه توپولوژیک، هار[1] پایای چپ [راست] می‌نامیم اگر $\lambda(xE) = \lambda(E)$ $[\lambda(Ex) = \lambda(E)]$ به ازای هر $x \in G$ و هر مجموعهٔ بورل E. مثلاً، اندازهٔ هار روی گروه جمعی $\mathbb{R}$ اندازهٔ لبگ و روی گروه جمعی گسستهٔ $\mathbb{Z}$، اندازهٔ شمارشی و روی گروه ضربی $\mathbb{R} \setminus \{۰\}$، $\frac{dx}{|x|}$ است. در واقع، اگر λ یک اندازهٔ پایای چپ باشد آنگاه $I(f) = \int_E f d\lambda$ یک انتگرال پایای چپ است یعنی $I(_x f) = I(f)$ که در آن $_x f(y) = f(xy)$.

محاسبهٔ اندازهٔ پایای چپ روی گروه‌های خاص ریشه‌ای طولانی دارد. فروبنیوس و شور بین ۱۹۰۰ و ۱۹۲۰ روی گروه‌های متناهی میانگین‌های زیادی ساخته‌اند [30]، و شور انتگرال‌های پایا

1) Haar

روی $SO(n)$ [گروه متعامد خاص از ماتریس‌ها] و $O(n)$ [گروه متعامد] را محاسبه کرده است. سرانجام ویل انتگرال‌های پایا روی $U(n)$ [گروه یکانی از ماتریس‌ها] را ساخته است. در ادامه بعضی از این گروه‌ها را بررسی خواهیم کرد.

سرآغاز پیدایش گروه‌های توپولوژیک را می‌توان سال ۱۹۳۰ دانست. برای گروه‌های شمارای دوم وجود اندازهٔ پایای چپ را هار در ۱۹۳۳ ارائه داد. این اندازه از آن پس به اندازهٔ هار معروف شد [30]، برهان یکتایی این اندازه از آنِ فون نویمن است [41]. ویل شرط شمارش‌پذیری را از این قضیهٔ وجودی حذف کرد و به طور منظم گروه‌های توپولوژیک و اندازهٔ هار را مورد مطالعه قرار داد [51]. سرانجام ثابت شد که گروه توپولوژیک G اندازهٔ هار یکتا دارد اگر و فقط اگر فشردهٔ موضعی باشد [22]. اینک به ذکر چند مثال می‌پردازیم که جزئیات آنها را می‌توان در [29] و [22] یافت.

(i) روی گروه متناهی G با تعداد اعضای n، $I(f)=\frac{1}{n}\sum_{x\in G}f(x)$ یک انتگرال پایای راست و نیز چپ است. و در نتیجه $\lambda(E)=\frac{1}{n}c(E)$ اندازهٔ هار راست و چپ است که در آن $c(E)$ تعداد اعضای E است.

(ii) در مورد گروه جمعی $\mathbb{R}$، $I(f)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx$ روی $C_c(\mathbb{R})$ انتگرال پایای چپ است و اندازهٔ هار متناظر همان اندازهٔ لبگ معمولی است.

(iii) فرض کنید G یک گروه نامتناهی و گسسته و $C_c^+(G)$ مجموعهٔ تمام توابع نامنفی بر G باشد که همه جا صفرند به‌جز تعداد متناهی نقطه. اگر $f\in C_c^+(G)$، آن‌گاه

$$f=\sum_{k=1}^{n}a_{k\,a_k^{-1}}\delta=\sum_{k=1}^{n}a_k\delta_{a_k^{-1}}$$

که در آن $\delta(e)=1$ و $\delta(x)=0$ وقتی که $x\neq e$. زیرا

$$f(x)=\sum_{k=1}^{n}a_{k\,a_k^{-1}}\delta(x)=\sum_{k=1}^{n}a_k\delta(a_k^{-1}x)=\begin{cases} a_i & x=a_i, \text{به‌ازای هر } i\\ 0 & x\neq a_i\ , \text{به‌ازای هر } i\end{cases}$$

پس، $I(f)=\sum_{k=1}^{n}a_kI(a_k^{-1}\delta)=(\sum_{k=1}^{n}a_k)I(\delta)$. در این صورت با فرض $I(\delta)=1$، اندازهٔ هار اندازهٔ شمارشی است.

(iv) فرض کنید G یک گروه توپولوژیک با ویژگی‌های زیر باشد.

الف) G زیرمجموعهٔ باز $\mathbb{R}^n$ است.

ب) اگر $x,y\in G$، xy تابعی مانند F است که اگر $x=(x_1,\ldots,x_n)$ ، $y=(y_1,\ldots,y_n)$، $F(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n)$ تصویر نگاشت F از $G\times G\subseteq\mathbb{R}^{2n}$ به $G\subseteq\mathbb{R}^n$ است.

ج) فرض کنید F_j تصویر F به مختص jام است، $\frac{\partial F_j}{\partial x_k}$ و $\frac{\partial F_j}{\partial y_k}$ بر $G\times G$ موجود و پیوسته است.

د) فرض کنید $\sigma_a:G\longrightarrow G$ و $\delta_a:G\longrightarrow G$ انتقال‌های چپ و راست باشد، یعنی

$\sigma_a(x) = ax$ و $\delta_a(x) = xa$، $S(a)$ و $D(a)$ را چنین تعریف می‌کنیم:

$$S(a) = |J(\sigma_a)|, \quad D(a) = |J(\delta_a)|$$

که در آن $J(\tau)$ ژاکوپین τ است. می‌دانیم $J(\sigma_a \circ \sigma_b) = J(\sigma_a).J(\sigma_b)$، و در نتیجه،

$$S(ab) = S(a)S(b) \quad (a, b \in G)$$

به طریق مشابه، $\delta_{ab} = \delta_b \circ \delta_a$ و از این رو

$$D(ab) = D(a)D(b)$$

و بالاخره، اگر e عضو واحد G باشد، $S(e) = D(e) = 1$. پس S و D هم‌ریختی‌های پیوسته از G به گروه ضربی $(0, \infty)$ هستند.

ادعا می‌کنیم که انتگرال‌های:
$I_s(f) = \int_G f(x)\frac{1}{S(x)}dx, \quad I_d(f) = \int_G f(x)\frac{1}{D(x)}dx \quad (f \in C_c(G))$ [به ترتیب انتگرال‌های راست و چپ هستند.] برای اثبات، فرمول تغییر متغیر در انتگرال چندگانه را به کار می‌بریم، داریم:

$$\int_{\sigma_a(G)} \varphi(x)dx = \int_G (\varphi \circ \sigma_a)(y)|J(\sigma_a)(y)|dy$$

حال اگر قرار دهیم $\varphi = {}_{a^{-1}} f \frac{1}{S}$ ، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} I_s({}_{a^{-1}}f) &= \int_G {}_{a^{-1}}f(x)\frac{1}{S(x)}dx = \int_G ((_{a^{-1}}f) \circ \sigma_a)(y)\frac{1}{S \circ \sigma_a(y)}S(a)dy \\ &= \int_G f(y)\frac{1}{S(y)}dy = I_s(f) \end{aligned}$$

پس با توجه به سایر خاصیت‌ها، $I_s(f)$ انتگرال هار چپ است. به طریق مشابه ثابت می‌شود که $I_d(f)$ انتگرال هار راست است.

فرض کنید λ اندازهٔ هار چپ روی گروه فشردهٔ موضعی G باشد در این صورت به‌ازای عضو ثابت $x \in G$ و مجموعهٔ بورل $E \subseteq G$

$$\lambda_x(E) = \lambda(Ex)$$

یک اندازهٔ هار چپ روی G تعریف می‌کند. پس بنابر قضیهٔ یکتایی، عدد مثبت Δ وجود دارد که

$$\lambda(Ex) = \Delta(x)\lambda(E)$$

به‌وضوح دیده می‌شود که

$$\Delta(x) = \frac{I(f_{x^{-1}})}{I(f)} \quad (I(f) \neq 0).$$

و $\Delta : G \longrightarrow (\circ, \infty)$ یک همریختی پیوسته است. این تابع را تابع مدولی می‌نامند. اگر G آبلی باشد، از تعریف معلوم است که $\Delta \equiv ۱$.

اگر G فشرده باشد، $\Delta(G)$ زیرگروهِ گروه ضربی $(\circ, \infty)$ و در نتیجه مساوی ۱ است. چنین گروه‌ها را گروه‌های تک مدولی می‌نامند. گروه‌های تک مدولی غیرآبلی و غیرفشرده وجود دارد [30]. در مثال (iv) دیده می‌شود که $\Delta = \frac{D}{S}$.

اگر مثال (iv) را در مورد گروه ضربی $\mathbb{R} \setminus \{\circ\}$ به کار بریم. تبدیل $x \longrightarrow ax$ دارای ژاکوپین a است و در نتیجه انتگرال هار به صورت $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{|x|} dx$ درمی‌آید، که در آن $f \in C_c(\mathbb{R} \setminus \{\circ\})$. در مورد گروه ضربی $\mathbb{C} \setminus \{\circ\}$ انتگرال هار به صورت $\int\int \frac{f(x,y)}{x^۲+y^۲} dxdy$ است.

کاربرد بعدی در مورد گروه ماتریسی زیر است

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ \circ & ۱ \end{pmatrix} |x, y \in \mathbb{R}, x \neq \circ \right\}.$$

می‌توان G را به صورت $(\mathbb{R}\setminus\{\circ\}) \times \mathbb{R}$ و با ضرب

$$(x, y)(u, v) = (xu, xv + y)$$

و به عنوان زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}^۲$ و با توپولوژی $\mathbb{R}^۲$ در نظر گرفت. در نتیجه G در شرایط مثال (iv) صدق می‌کند و تبدیل $\sigma_{(a,b)}$ به صورت

$$\sigma_{(a,b)}(x, y) = (ax, ay + b)$$

است. ژاکوپین این تبدیل $a^۲$ و در نتیجه انتگرال هار چپ به صورت ذیل است:

$$I_l(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x,y)}{x^۲} dxdy \quad (f \in C_c(G)).$$

به طریق مشابه تبدیل $\delta_{(a,b)}$ روی G به شکل $\delta_{(a,b)}(x, y) = (ax, by + y)$ و ژاکوپین آن a است و در نتیجه انتگرال هار راست به صورت ذیل است:

$$I_r(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x,y)}{|x|} dxdy \quad (f \in C_c(G))$$

این مثال یکی از ساده‌ترین مثال‌هایی است که در آن انتگرال‌های هار راست و چپ متفاوت هستند. تابع مدولی برابر است با $\Delta(x, y) = \frac{D(x,y)}{S(x,y)} = \frac{۱}{|x|}$.

(v) فرض کنید $GL(n, \mathbb{R}) = \{T = (a_{ij})_{n\times n} | a_{i,j} \in \mathbb{R}, \det T \neq \circ\}$ با ضرب ماتریس‌ها و توپولوژی القایی از $\mathbb{R}^{n^۲}$ مجهز شده است. با اتکاء به مثال (iv) می‌توان نشان داد که اندازهٔ هار روی این گروه $|\det T|^{-n} dT$ است که در آن، dT اندازهٔ لبگ روی $\mathbb{R}^{n^۲}$ است.

(vii) مثال جالب دیگر $G = (\mathbb{Z}_{۲})^{\mathcal{N}_{۰}}$ با توپولوژی حاصلضربی است که در آن $\mathbb{Z}_{۲}$ گروه جمعی اعداد صحیح به هنگ ۲ است، و هر عضو $x \in (\mathbb{Z}_{۲})^{\mathcal{N}_{۰}}$، به صورت $x = (a_{۱}, a_{۲}, \ldots)$ است که در آن a_i مقدارهای صفر یا یک را دارد.

حال نگاشت $\phi : (\mathbb{Z}_{۲})^{\mathcal{N}_{۰}} \longrightarrow [۰, ۱]$ به صورت

$$\phi(x) = \sum_{j=۱}^{\infty} \frac{a_j}{۲^j}$$

تعریف می‌کنیم. اگر $x \in [۰, ۱]$، آنگاه $\phi^{-۱}(\{x\})$ یک تک نقطه است مگر آن که $x = \frac{j}{۲^k}$ $(۱ \leq j \leq ۲^k - ۱)$، که در این صورت دو نقطه است. این نگاشت پیوسته و هم‌ریختی نیست ولی تقریباً ۱ـ۱ است. اندازهٔ هار روی G به صورت ذیل به دست می‌آید که در آن m اندازهٔ هار $[۰, ۱]$ است.

$$m(B) = \lambda(\phi^{-۱}(B)) \quad (\text{بورل} B \subseteq [۰, ۱])$$

در واقع، با طی مرحله‌های ذیل، می‌توان این واقعیت را دریافت.

(i) اگر $I = [\frac{j}{۲^k}, \frac{j+۱}{۲^k}]$ $(۰ \leq j < ۲^k)$، آنگاه

$$\Phi^{-۱}(I) = \prod_{i=۱}^{\infty} E_i$$

که در آن $E_i = \mathbb{Z}_{۲}$ اگر $i > k$ و $E_i = \{۰\}, \{۱\}$ اگر $i \leq k$. زیرا $m(I) = \frac{۱}{۲^k} = \lambda(\phi^{-۱}(I))$.

(ii) نیم بازه‌های $[\frac{j}{۲^k}, \frac{j+۱}{۲^k})$ تشکیل یک جبر $\mathcal{A}_{\infty}$ می‌دهند که σ ـ جبر بورل روی $[۰, ۱)$ را تولید می‌کند و اجتماع متناهی دوبه‌دو جدا از هم از مجموعه‌های $E_{۲}$ در (i) جبر $\mathcal{A}_{۲}$ را تولید می‌کند که σ ـ جبر بورل $G = (\mathbb{Z}_{۲})^{\mathcal{N}_{۰}}$ را می‌سازد. اگر $A \in \mathcal{A}_{۱}$ در این صورت $\phi^{-۱}(A)$ یک مجموعهٔ متناهی در $\mathcal{A}_{۲}$ است و $m(A) = \lambda(\phi^{-۱}(A))$.

به طوری که اشاره شد، برهان هار را آندره ویل و هانری کارتان [12]، [51] به طرز ماهرانه‌ای به کلیهٔ گروه‌های توپولوژیک فشردهٔ موضعی گسترش دادند. ایدهٔ اصلی برهان در واقع در این نکته نهفته است که بزرگی مجموعه‌های فشردهٔ A و B با درون‌های چگال را نسبت به هم بسنجیم. فرض کنید $h(A, B)$ کمترین عدد انتقال‌های B باشد که A را می‌پوشاند. هار اندازهٔ خود را به صورتِ

$$m(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{h(A, B_n)}{h(C, B_n)}$$

تعریف کرد، که در آن C مجموعه‌ای ثابت و دلخواه است و B_nها یک پایهٔ همسایگی‌های فشردهٔ e را تشکیل می‌دهند [12]. به طوری که در مقالهٔ [۵۸] اشاره کردیم هار و فون نویمن در این زمان و در ارتباط نزدیک با مسألهٔ پنجم هیلبرت بودند. مسألهٔ پنجم هیلبرت بیان می‌کند که هر گروه توپولوژیک

فشرده و اقلیدسی موضعی یک گروه لی است. [یک فضای توپولوژیک را اقلیدسی موضعی می‌نامیم اگر عدد طبیعی مانند n وجود داشته باشد به طوری که به‌ازای هر x یک همسایگی از x با گوی واحد $\mathbb{R}^n$ همسان ریخت باشد]. مقاله‌های هار و فون نویمن در مجلهٔ آنالس در یک شماره و پشت سر هم چاپ شده‌اند[48]. در نتیجه ثابت شد که:

۱ـهر گروه فشردهٔ اقلیدسی موضعی یک گروه لی است یعنی ساختمانی تحلیلی دارد.

۲ـهر گروه فشرده حد وارون گروه‌های لی است.

اثبات وجود اندازهٔ هار روی یک گروه فشردهٔ موضعی گامی اساسی در جهت گسترش آنالیز همساز بود (۲). جبر گروهی $L^1(G)$ و جبر اندازهٔ $M(G)$ منبع‌های خوبی برای مطالعهٔ خاصیت‌های گروه G هستند. $M(G) = C_\circ(G)^*$ یک $*-$ جبر باناخ واحددار است که در آن اندازهٔ دیراک δ_e واحد و μ^* با تعریف $\mu^*(E) = \overline{\mu(E^{-1})}$ برگشت روی آن و همچنین ضرب آن پیچش به صورت زیر است:

$$\mu * \nu(\psi) = \int\int \psi(x)d\mu(x)d\nu(y) \quad (\mu, \nu \in M(G), \psi \in C_\circ(G))$$

همچنین

$$\begin{aligned} L^1(G) \quad &= \{f | f : G \longrightarrow \mathbb{C}, \textstyle\int_G |f| d\lambda < \infty\} \\ &\cong \{\mu | \mu \ll \lambda\} = M_a(G) \end{aligned}$$

نه تنها یک $*$ ـ زیرجبر بلکه یک ایده‌آل $M(G)$ است. ضرب این جبر به صورت:

$$f * g(x) = \int_G f(xy^{-1})g(y)d\lambda(y) \quad (f, g \in L^1(G))$$

برگشت آن به صورت $f^*(x) = \overline{f(x^{-1})}\Delta(x^{-1})$ است.

$L^1(G)$ دارای واحد تقریبی کراندار است.

میانگین‌پذیری

نکتهٔ مهم دیگری که در اینجا قابل بحث می‌باشد، این است که فون نویمن برهان دیگری برای اثبات وجود اندازهٔ هار گروه‌های فشرده ارائه داد. این بحث به همراه بحث دیگری در مورد اندازهٔ لبگ اتفاق افتاد و مبحث جدیدی در آنالیز همساز گشود که امروزه به مبحث میانگین‌پذیری معروف است و پژوهش‌های عمده‌ای را شامل می‌شود.

گروه فشردهٔ موضعی G را میانگین‌پذیر می‌نامیم اگر یک میانگین پایای چپ روی G موجود باشد. m را یک میانگین پایای چپ می‌نامیم در صورتی که m یک تابعک خطی روی $L^\infty(G)$ باشد و

$$m \geq \circ, \quad m(1) = 1, \quad m({}_x\phi) = m(\phi)$$

که در آن $({}_x\phi(y) = \phi(xy) \quad (y \in G)$.

به طوری که ملاحظه می‌شود این تعریف را می‌توان به نیم‌گروه‌ها نیز توسیع داد. بعداً در این مورد بیشتر بحث خواهیم کرد.

در ۱۹۰۴ لبگ برای توسیع انتگرال ریمان شش خاصیت زیر از انتگرال ریمان را برای تابع‌های کراندار و انتگرال‌پذیر f و g در نظر گرفت [45]:

۱ــ (پایایی) $\int_a^b f(x)dx = \int_{a+h}^{b+h} f(x-h)dx$

۲ــ $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = ۰$

۳ــ $\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

۴ــ اگر $f \geq ۰$ و $b > a$ آن‌گاه $\int_a^b f(x)dx \geq ۰$

۵ــ $\int_۰^۱ ۱dx = ۱$

۶ــ اگر $f_n \nearrow f$ها و f_n انتگرال‌پذیر باشد آن‌گاه $\int_a^b f_n(x)dx \nearrow \int_a^b f(x)dx$.

سؤال اصلی لبگ این بود که آیا شرط (۶) مستقل از سایر شرایط است. از این رو او تعریف انتگرال برای تابع‌های مشخصه را کافی دانست و به تعریف اندازه رسید: به هر مجموعهٔ کراندار E می‌توان عددی نامنفی مانند $\lambda(E)$ نسبت داد به طوری که:

('۱) $m(E+x) = m(E)$

('۲) $m(\bigcup_{n=۱}^{\infty} E_n) = \sum_{n=۱}^{\infty} m(E_n)$ (E_nها دوبه‌دو مجزا هستند).

('۳) $m([۰,۱]) = ۱$.

ملاحظه می‌شود که (۱) معادل ('۱) و (۵) معادل ('۳) است. (۳) و (۶)، ('۲) را نتیجه می‌دهد و $m([a,b]) = b-a$. اگر E یک مجموعهٔ کراندار باشد تعریف می‌کنیم

$$m_e(E) = \inf\left\{\sum_{n=۱}^{\infty} l(I_n) | E \subseteq \bigcup_{n=۱}^{\infty} I_n\right\}$$

$$m_i(E) = m(A) - m_e(A \backslash E)$$

که در آن A یک بازهٔ کراندار شامل E است. E اندازه‌پذیر است اگر $m_e(E) = m_i(E)$، و اکنون می‌دانیم که همهٔ زیرمجموعه‌های کراندار $\mathbb{R}$ اندازه‌پذیر نیستند.

مفهوم اندازه‌پذیری به مجموعه‌های بی‌کران گسترش یافت و ثابت شد که روی $\mathbb{R}^n$ اندازه‌ای وجود دارد که تحت انتقال پایا است، σ ـ جمعی است و روی کرهٔ واحد برابر ۱ است.

در ۱۹۱۴ هاوسدورف سؤال زیر را مطرح کرد [45]. آیا می‌توان به هر مجموعهٔ کراندار، $\mathbb{R}^n$ عددی نامنفی مانند $m(E)$ نسبت داد که

۱ــ m پایا باشد.

۲ــ m دارای خاصیت جمعی متناهی باشد.

۳– m روی مجموعه‌ای مانند $E_\circ$ برابر ۱ باشد.

هاسدورف خود به این مسأله در حالت $n \geq ۳$ پاسخ منفی داد. در واقع هاسدورف نشان داد که

$$S_۲ = A \cup B \cup C \cup D$$

که در آن D شمارا است و با دوران ۱۲۰ درجه A، B و C و نیز A و $B \cup C$ را می‌توان در حالت خاص قرار می‌داد به طوری که:

$$m(A) = m(B) = m(C) = \tfrac{۱}{۳}$$
$$۲m(B) = m(B \cup C) = m(A) = \tfrac{۱}{۲}$$

اگر $m(S_۲) = ۱$ یعنی $E_\circ = S_۲$. در این صورت یک تناقض به دست می‌آید. برای جزئیات بیشتر می‌توانید به [45]، [50]، [43] نگاه کنید.

در ۱۹۲۳ این مسأله مورد توجه باناخ قرار گرفت [45]. باناخ نشان داد که جواب حدسیهٔ هاوسدورف به‌ازای $n = ۱, ۲$ مثبت است. در نتیجه او انتگرال لبگ را به تابعک‌های متناهی جمعی روی تابع‌های کراندار یک یا دو متغیره گسترش داد. از این به بعد مسألهٔ هاوسدورف به پارادوکس باناخ ــ تارسکی معروف شد. زیرا جواب‌های حدسیه برای $n \geq ۳$ و حالت‌های $n = ۱, ۲$ متفاوت بود. در واقع، ایده این بود که دو زیرمجموعهٔ فضای $\mathbb{R}^n$ هم‌ارز هستند اگر این دو مجموعه را بتوان به تعداد متناهی [پاشمارا] مجموعه افراز کرد که دوبه‌دو همنهشت [طولپا] باشند. اگر $n \geq ۱$، هر دو مجموعهٔ کراندار A و B با درون ناتهی به طور شمارا هم‌ارزند ولی برای هم‌ارزی به طور متناهی، حدسیهٔ هاوسدورف به‌ازای $n \geq ۳$ برقرار است ولی به‌ازای $n = ۱, ۲$ برقرار نیست.

در ۱۹۲۹ فون نویمن برهان هاوسدورف را به دقت مورد مطالعه قرار داد و دریافت که این اختلاف ناشی از ساختار فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^n$ به‌ازای nهای مختلف نیست بلکه گروه‌های طولپایی‌هایی که روی $\mathbb{R}^n$ها عمل می‌کنند متفاوت هستند، در واقع در حالت $n \geq ۳$، این گروه شامل یک زیرگروه آزاد با دو مولد است و در حالت‌های $n = ۱, ۲$ چنین اتفاقی نمی‌افتد.

نکتهٔ دیگری که باید توجه داشت این است که قضیهٔ همگرایی یکنوا معادل جمعی ــ شمارایی است ولی باناخ نشان داد که اندازهٔ لبگ تنها اندازه‌ای نیست که به طور متناهی ــ جمعی است [43].

در سال‌های ۱۹۴۰ تا ۱۹۵۷ موضوع گروه و نیم‌گروه‌های میانگین‌پذیر به وسیلهٔ دِی [14] به طور وسیع مورد مطالعه قرار گرفت. در واقع اصطلاح میانگین‌پذیری توسط دِی در ۱۹۵۰ مطرح شد[۱] بعد از بحث باناخ و پژوهش‌های فون نویمن دامنهٔ بحث روی سایر زمینه‌های آنالیز گسترش یافت و با توجه به کاربردها، میانگین‌پذیری در سایر زمینه‌ها نیز گسترش یافت، به طوری که امروزه مبحث میانگین‌پذیری هنوز هم یکی از مبحث‌های عمدهٔ پژوهشی است.

---

[۱] توجه شود که: روسی = $\mathrm{ameHa}\partial e\pi b\mathrm{HaR}$ ، فرانسه = moyenable ، آلمانی = mittelbar

منابع زیر در مورد میانگین‌پذیری بسیار با ارزش هستند:

۱ــ کتاب گرین لیف [27] اولین کتاب مجملی است که در ۱۹۶۹ تدوین شده است.

۲ــ فصل ۸ کتاب ریتر [47].

۳ــ مقاله‌های تحلیلی دی در ۱۹۵۷ و ۱۹۵۸ [14]، [43].

۴ــ کتاب ژان ـ پل پییر [45].

۵ــ کتاب‌های آلن ال. ئی. پاترسون [43]، [44].

۶ــ مقالهٔ ب. جانسون [33]، [34] و مقاله‌ها بعدی او.

۷ــ مقاله‌های متعدد اِ.ت. لائو.

۸ــ مقاله‌های فریدون قهرمانی.

۹ــ کتاب والکر رُنده [50].

۱۰ــ کتاب هیویت وراس [29].

در ضمن ریاضی‌دانان معروف دیگر چون دیلز، هلمسکی، گرونبک، لُوی، $\cdots$ در این زمینه پژوهش‌های ارزنده‌ای انجام داده‌اند.

تعدادی از فارغ‌التحصیلان دورهٔ دکتری در دانشگاه تربیت معلم و تربیت مدرس رساله‌های خود را به میانگین‌پذیری اختصاص داده‌اند: به‌منابع [46]، [24]، [39] و [18] مراجعه شود. این منابع رساله‌های دکتری ریاضی هستند که زیرنظر اینجانب فارغ‌التحصیل شده‌اند. هر یک از این فارغ‌التحصیلان نیز مقاله‌هایی در این زمینه چاپ کرده‌اند.[1]

فرض کنید $\mathcal{M}(G)$ مجموعهٔ تمام مجموعه‌های اندازه‌پذیر (نسبت به λ) روی G است. فرض کنید μ یک اندازهٔ متناهی جمعی روی $\mathcal{M}(G)$ است که روی مجموعه‌های پوچ، صفر موضعی است و $\mu(G)=1$. فرض کنید $A=<\chi_E|E\in\mathcal{M}(G)>$ و قرار دهید:

$$m(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\chi_{E_i})=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\mu(E_i)\quad(\alpha_i\in\mathbb{C},\,E_i\in\mathcal{M}(G))$$

در این صورت m روی A پیوسته است و چون A در $L^\infty(G)$ چگال است می‌توان m را روی $L^\infty(G)$ گسترش داد. m روی $L^\infty(G)$ یک میانگین است یعنی $\|m\|=1=m(1)$. بنابر [16, 0.2] بین مجموعهٔ میانگین‌های پایای چپ و مجموعهٔ اندازه‌های مثبت، پایای چپ و جمعی متناهی روی $\mathcal{M}(G)$ با نرم یک، و صفر در خارج یک مجموعه λ ـ موضعاً صفر یک تناظر یک به یک برقرار است. از این رو، میانگین m عضو $L^1(G)^{**}$ است که یک فضای بسیار بزرگ و فوق‌العاده پیچیده است. فرض کنید $\mathfrak{M}(G)$ فضای میانگین‌ها روی G است. می‌دانیم که $L^1(G)$ را

---

۱) فارغ‌التحصیلان سایر دانشگاه‌های ایران هم مقاله‌های متعددی در این زمینه منتشر نموده‌اند ولی فهرست‌بندی آنها مستلزم بررسی بیشتری است.

می‌توان در $L^1(G)^{**}$ نشاند به طوری که هر $f \in L^1(G)$ به $\hat{f}$ می‌رود که $\hat{f}(\phi) = \phi(f)$.
ساده‌ترین قضیه‌ای که در مورد میانگین‌ها می‌توان گفت این است که:

قضیه. (i) $m \in L^1(G)^{**}$ یک میانگین است اگر و فقط اگر $m(1) = 1$، $m \geq 0$ و

$$ess \inf_{x\in G} \phi(x) \leq m(\phi) \leq ess \sup_{x\in G} \phi(x)$$

به‌ازای هر $\phi : L^\infty(G) \to \mathbb{R}$ حقیقی مقدار در $L^\infty(G)$.

(ii) $m(G)$ یک زیرفضا، w^* ـ فشرده و محدب از $L^1(G)^{**}$ است.

(iii) اگر $P^1(G) = \{f \in L^1(G), f \geq 0, \int f d\lambda = 1\}$ آن‌گاه $\widehat{P^1}(G)$ در $m(G)$ با توپولوژی w^* چگال است.

چند مثال.

۱ — تمام گروه‌های فشرده میانگین‌پذیرند.

در واقع اگر λ اندازهٔ هار چپ G باشد که $\lambda(G) = 1$، آن‌گاه $m(f) = \int_G f d\lambda$ یک میانگین پایای چپ روی G است.

۲ — آیا میانگین پایا روی گروه $\mathbb{Z}$ وجود دارد؟

تعریف می‌کنیم:

$$f_n = \frac{1}{2n+1} \sum_{r=-n}^{n} \delta_r$$

واضح است که $f_n \in P^1(G)$ و اگر $\phi \in l^\infty(\mathbb{Z})$، آن‌گاه

$$\begin{aligned}
|\hat{f}_n(\phi s) - \hat{f}_n(\phi)| &= |\frac{1}{2n+1}(\sum_{r=-n}^{n} \phi(r+s) - \phi(r))| \quad (s > 0) \\
&= |\frac{1}{2n+1}(\sum_{r=-n+s}^{n+s} \phi(r) - \sum_{r=-n}^{n} \phi(r))| \\
&= |\frac{1}{2n+1}(- \sum_{-n+s}^{-n+s-1} \phi(r) + \sum_{n+1}^{n+s} \phi(r)| \\
&\leq \frac{2s\|\phi\|}{2n+1} \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)
\end{aligned}$$

اگر $s < 0$، باز هم نتیجهٔ فوق برقرار است. حال اگر m یک نقطهٔ w^*انباشتگی $\{\hat{f}_n\}$ باشد، آن‌گاه بنابه بحث فوق

$$m(\phi\ s) = m(\phi)$$

یعنی m یک میانگین پایا است و $(\mathbb{Z}, +)$ میانگین پذیر است.

۳− فرض کنید $G = \mathbb{R}$. در این حالت فرض کنید $f_n = \frac{۱}{۲n}\chi_{[-n,n]}$. حال اگر $x \geq ۰$ و $\phi \in L^{\infty}(\mathbb{R})$، آن‌گاه

$$\begin{aligned} |\hat{f}_n(\phi x) - \hat{f}_n(\phi)| &= \frac{۱}{۲n}|\int_{-n}^{n}(\phi(x+t) - \phi(t))dt| \\ &\leq \frac{۱}{۲n}|\int_{-n}^{n}\phi(x+t)dt - \int_{-n}^{n}\phi(t)dt| \\ &= \frac{۱}{۲n}|\int_{-n+x}^{n+x}\phi(t)dt - \int_{-n}^{n}\phi(t)dt| \\ &= \frac{۱}{۲n}|\int_{-n}^{-n+x}\phi(t)dt + \int_{n}^{n+x}\phi(t)dt| \\ &\leq \frac{۲n\|\phi\|}{۲n} \longrightarrow ۰ \quad (n \longrightarrow \infty) \end{aligned}$$

این رابطه به طریق مشابه در مورد $x < ۰$ نیز برقرار است. پس هر w^*ـنقطهٔ انباشتگی $\hat{f}_n$ یک میانگین پایا برای $\mathbb{R}$ است.

۴− گروه «$ax+b$»

این گروه در واقع، گروه آفینی $S_۲$ از $\mathbb{R}$ است. یعنی گروه $S_۲ = (۰, \infty) \times \mathbb{R}$ با ضرب زیر است:

$$(a,b)(a',b') = (a + a'b, bb')$$

ساختن f_n در اینجا چندان روشن نیست ولی می‌دانیم که اندازهٔ هار λ روی $S_۲$ به شکل $\frac{dxdy}{y^۲}$ است. فرض کنید $A_n \subseteq S_۲$. اگر $f_n = \frac{\chi_{A_n}}{\lambda(A_n)}$، آن‌گاه هر w^*ـنقطهٔ انباشتگی $\hat{f}_n$ یک میانگین پایا است پس $S_۲$ میانگین‌پذیر است.

۵− گروه آزاد با دو مولد یعنی $\mathbb{F}_۲$ میانگین‌پذیر نیست.

اعضای $\mathbb{F}_۲$ کلمات کاهش یافته‌ای هستند که با اعضای مجموعهٔ $\{a, b, a^{-۱}, b^{-۱}\}$ تولید شده‌اند. اگر $x \in \{a, b, a^{-۱}, b^{-۱}\}$ و E_x مجموعهٔ همهٔ کلماتی باشد که با x شروع شده است و m یک میانگین پایای چپ روی $F_۲$ باشد که می‌توان به عنوان یک اندازه در نظر گرفت، در این صورت

$$۱ = m(\mathbb{F}_۲) = m(\{e\}) + m(E_a) + m(E_{a^{-۱}}) + m(E_b) + m(E_{b^{-۱}})$$

ولی کلمات در $aE_{a^{-۱}}$ کلماتی هستند که با b، $b^{-۱}$، $e, a^{-۱}$ شروع شده‌اند پس

$$۱ = m(\mathbb{F}_۲) = m(E_a) + m(aE_{a^{-۱}})$$

به طریق مشابه

$$۱ = m(\mathbb{F}_۲) = m(E_b) + m(bE_{b^{-۱}})$$

ولی چون m پایای چپ است پس

$$m(E_a) + m(E_{a^{-1}}) = 1$$
$$m(E_b) + m(E_{b^{-1}}) = 1$$

که یک تناقض است.

۶− گروه $G = SL(2,\mathbb{R})$ یک گروه فشردهٔ موضعی است. این گروه شامل زیرگروه گسستهٔ H است که با $\mathbb{F}_2$ یک‌ریخت است پس به عنوان گروه گسسته میانگین‌پذیر نیست. این مثال‌ها از کتاب پاترسون [43] برداشته شده است.

در مثال‌های قبلی دیدیم که گروه‌های آبلی $\mathbb{R}$ و $\mathbb{Z}$ میانگین‌پذیرند و S_2 گروه حل‌پذیری است که با گروه‌های آبلی در ارتباط است. سؤال این است که آیا هر گروه آبلی میانگین‌پذیر است، جواب مثبت است. قضیهٔ مارکوف ــ کاکوتانی [45] بیان می‌کند که:

اگر X یک فضای موضعی محدب موضعی و $K \subseteq X$ فشرده باشد و S نیم گروه تبدیلات پیوسته $T : K \longrightarrow K$ باشد که آفینی هستند $[T(\alpha k_1 + (1-\alpha)k_2) = \alpha Tk_1 + (1-\alpha)Tk_2$ که در آن $0 \leq \alpha \leq 1$ ، $k_1, k_2 \in K]$ آن‌گاه اعضای S دارای نقطهٔ ثابت مشترک هستند.

حال اگر G یک گروه فشردهٔ موضعی و آبلی، $X = L^\infty(G)^*$، $K = \mathfrak{M}(G)$ (مجموعهٔ میانگین‌های روی G) و $S = \{m \longrightarrow xm (x \in G)\}$ گروه تبدیلات روی $\mathfrak{M}(G)$ باشد آنگاه شرط‌های قضیهٔ بالا برقرارند پس $x_\circ$ی وجود دارد که $x_\circ m = m$ یعنی m پایای چپ است.

ویژگی‌های میانگین‌پذیری به زیرگروه‌ها و گروه‌های خارج‌قسمتی نیز سرایت می‌کند.

اشاره کردیم که هر گروه که دارای زیرگروهی یک‌ریخت با $\mathbb{F}_2$ باشد میانگین‌پذیر نیست. سؤالی که برای مدت‌ها باز بود این بود که آیا عکس این مسأله برقرار است. الشانسکی مثالی از یک گروه میانگین‌ناپذیر ساخته است که شامل $\mathbb{F}_2$ نیست. مثال او بسیار پیچیده و در عین حال کاربردی از نظریهٔ ترکیبیاتی گروه‌ها است [13].

در دو جهت دیگر هم نظریهٔ میانگین‌پذیری رشد کرده است.

الف) جبرهای باناخ میانگین‌پذیر اساساً بر مقالهٔ جانسون استوارند[33]. در این مقاله ابتدا تعریف همانستگی آمده است. به اختصار فرض کنید A یک جبر باناخ و X یک A ــ مدول باناخ دو طرفه است. نگاشت خطی و کراندار $D : A \longrightarrow X$ یک اشتقاق نامیده می‌شود اگر $D(ab) = D(a)b + aD(b)$ و اشتقاق D درونی نامیده می‌شود اگر به صورت $ad_x a = ax - xa$ باشد. گوئیم A میانگین‌پذیر است اگر هر اشتقاق $D : A \longrightarrow X^*$ درونی باشد. یکی از قضیه‌های اساسی جانسون در مقاله‌ای مفصل این است که:

G میانگین‌پذیر است اگر و فقط اگر $L^1(G)$ میانگین‌پذیر باشد [33]. این قضیه به جبرهای فوریه $A(G)$ نیز تعمیم یافته است که در جای خود اشاره خواهیم کرد. در واقع $A(G)$ حالت ناجابجایی $L^1(G)$ است.

بعد از این مقالهٔ اساسی جانسون، میانگین‌پذیری به جبرهای باناخ گسترش یافت و مسایل و پروژه‌های زیادی را ایجاد کرد.

تابع‌های تقریباً متناوب

به طوری که اشاره شد برهان متفاوت فون نویمن برای اثبات وجود اندازهٔ هار روی گروه‌های فشرده منجر به این ایده شد که می‌توان این برهان را برای گروه‌های فشردهٔ موضعی گسترش داد ولی در این حالت به‌جای اندازهٔ هار به میانگین می‌رسیم که مقدار آن در ۱ برابر ۱ است. این ایدهٔ فون نویمن مطالعهٔ تابع‌های تقریباً متناوب را در برداشت. مقالهٔ وی در ۱۹۳۴ [40] چاپ شد. برای درک این موضوع به مقالهٔ هارولد بور برمی‌گردیم [9]. فرض کنید

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\lambda_k x} \quad \text{همگرا}$$

سری فوریهٔ تابع پیوستهٔ یکنواخت و کراندار باشد که در آن λ_k ها مضرب‌های گویا از یکدیگر نیستند. از این رو f متناوب نیست. به طور مسلم این سری به طور یکنواخت همگرا نیست ولی بور دریافت که همگرایی طبیعی به شکل زیر میسر است:

$$\lim_{N\to\infty} \lim_{T\to\infty} \frac{۱}{۲N} \int_{-T}^{T} |f(x) - \sum c_k e^{i\lambda_k x}|^{۲} dx = ۰,$$

و برای تابع‌ها تقریباً متناوب حد زیر موجود است:

$$m(f) = \bar{f} = \lim_{T\to\infty} \frac{۱}{۲T} \int_{-T}^{T} f(x) dx.$$

فون نویمن دریافت که اگر f تقریباً متناوب باشد $\overline{con}\{f_x | x \in \mathbb{R}\}$ (بستار غلاف محدب) شامل میانگین منحصربه‌فرد بور است.

[تابع f روی G تقریباً متناوب نامیده می‌شود اگر به‌ازای هر $\epsilon > ۰$ عددی مانند δ وجود داشته باشد به طوری که به‌ازای هر بازه I اگر $l(I) < \delta$، آن‌گاه $\|R_t f - f\| < \epsilon$ و یا $\overline{con}\{f_x | x \in \mathbb{R}\}$ فشرده باشد.]

این ایده به گروه‌های گسسته و سپس به سایر گروه‌ها نیز توسیع یافت، به طوری که ایدهٔ فون نویمن با دو مقالهٔ [42] و [48] بوخنر و ویگنر ادامه یافت. [ویگنر بیشتر یک فیزیک‌دان بود]. در نتیجه دو دسته از گروه‌ها به دست آمدند.

I) گروه‌های تقریباً متناوب مینیمال: یعنی گروه‌هایی که تابع‌های تقریباً متناوب غیرثابت نمی‌پذیرند.

II) گروه‌های تقریباً متناوب ماکسیمال: یعنی گروه‌هایی که به‌اندازهٔ کافی تابع‌های تقریباً متناوب غیرثابت می‌پذیرند به طوری که نقاط را جدا می‌کنند.

بالاخره، آندره ویل [51] ثابت کرد که:

گروه G تقریباً متناوب ماکسیمال است اگر و فقط اگر بتوان آن را به طور پیوسته در یک گروه فشرده نشاند.

در واقع میانگین بور روی تابع‌های تقریباً متناوب از ساختن اندازهٔ هار روی گروه‌های فشرده به دست می‌آید. یعنی نظریهٔ تابع‌های تقریباً متناوب روی گروه‌های گسسته به‌نظریهٔ تابع‌های پیوسته روی گروه‌های فشرده می‌انجامد. در نتیجه ایدهٔ جدیدی وارد حوزهٔ آنالیز همساز تحت عنوان فشرده‌سازی گروه‌ها و نیم‌گروه‌ها شد. توسیع مفهوم تابع‌های تقریباً متناوب به حوزه‌های دیگر نیز گسترش یافت. مثلاً در تعریف بوخنر از مفهوم وارون استفاده نشده است و از این رو تابع‌های تقریباً متناوب به نیم‌گروه‌های توپولوژیک و یا حتی نیم‌گروه‌های نیم توپولوژیک که در نیم گروه‌های عمل‌گرهای روی فضاهای باناخ ظاهر می‌شود توسیع یافت [38]، [7].

در راستای دیگر ابرلین [7] توسیع دیگری تحت عنوان تابع‌های تقریباً متناوب ارائه نمود.

تابع پیوسته و کراندار f روی نیم‌گروه توپولوژیک S تقریباً متناوب ضعیف نامیده می‌شود اگر $\overline{con}\{f_x|x \in S\}$ به طور ضعیف پیوسته باشد.

جبرهای فوریه و فوریه استیلتیس

یکی دیگر از پیشرفت‌های اساسی در آنالیز همساز محض و کاربردی تعریف جبرهای فوریه و فوریه استیلتیس است. به طوری که قبلاً اشاره کردیم نظریهٔ سری‌های فوریه ریشهٔ بسیاری از شاخه‌های آنالیز جدید است و اشاره شد که اگر f تابعی بر حوزهٔ D و دارای نمایشی به شکل

$$f(t) = \sum f(\lambda_n) S_n(t)$$

باشد که در آن $\{\lambda_n\}$ دنباله‌ای از اعضای D و $\{S_n\}$ دنباله‌ای از تابع‌ها است، تعمیمی از سری‌های فوریه به دست می‌آید. چنین سری را یک سری نمونه‌گیری می‌نامند. از دیدگاه نظری روش‌های نمونه‌گیری رابطهٔ نزدیکی با درونیابی، تقریب، تابع‌های ویژه، توسیع به وسیلهٔ تابع‌ها ویژه، توسیع به وسیلهٔ مقادیر ویژه، نظریهٔ پَلِه ــ وینر، آنالیز عددی و آنالیز همساز دارد [31].

از نظر کاربردی، نظریهٔ نمونه‌گیری در نظریهٔ پیشگویی، نظریهٔ آگاهی، فرآیندهای تصادفی، اپتیک، اسپکتروسکوپی و فرآیند تصویری دوبعدی و سرانجام آنالیز چندریزگی و موجک‌ها کاربرد دارد [31].

بحث در این مورد از حوصلهٔ این مقاله خارج است و در حیطهٔ تخصص نگارنده نیست. هدف از اشاره به این نکات صرفاً بیان این واقعیت است که نظریه‌های ریاضی محض ریشه در کاربرد دارند

و شاخه‌های آنها هم به کاربرد می‌رسند. هیچ تفکیکی بین ریاضیات محض و کاربردی نمی‌توان یافت مگر آن که این تفکیک صرفاً جهت سهولت در تحقیق و مطالعه انجام پذیرد، و بالاخره بعضی از شاخه‌های ریاضیات از منظر زیباشناختی و یا کاربرد در سایر شاخه‌های ریاضی توسیع پیدا کرده‌اند.

یکی از حالت‌های بحث کلی فوق تبدیل تابع f روی $\mathbb{R}$ به سری فوریه

$$f(x) \sim \frac{۱}{۲\sqrt{۲}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-inx}$$

و یا به تبدیل

$$\hat{f}(x) = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-ixt} dt$$

است. قضیهٔ اشتاین بیان می‌کند که $f \longrightarrow \hat{f}$ فضای $L^{۱}(\mathbb{R})$ را به $C_{\circ}(\mathbb{R})$ می‌نگارد و قضیهٔ پلانشرل بیان می‌کند که $f \longrightarrow \hat{f}$ از $L^{۲}(\mathbb{R})$ به $L^{۲}(\mathbb{R})$ یک تبدیل خطی کراندار است که $\|\hat{f}\|_{۲} = \|f\|_{۲}$. این قضیه به حالت $۱ < p < ۲$ نیز تعمیم یافته و تبدیل وارون آن محاسبه شده است [31] و [49]. در حالت $p > ۲$ تبدیل فوریهٔ تابع $f \in L^{p}(\mathbb{R})$ به معنی توزیع توصیف می‌شود.

می‌دانیم که $L^{۱}(\mathbb{R})$ با ضرب پیچشی

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t) g(t) dt$$

یک جبر باناخ است و مجموعهٔ

$$A(\mathbb{R}) = \{\hat{f} | f \in L^{۱}(\mathbb{R})\}$$

با توجه به

$$\widehat{f * g} = \hat{f}\hat{g}$$

با ضرب نقطه‌وار یک جبر باناخ است. به طریق مشابه $M(\mathbb{R})$ یک جبر باناخ واحددار است و در نتیجه،

$$B(\mathbb{R}) = \{\hat{\mu} | \mu \in M(\mathbb{R})\}$$

یک جبر باناخ است.

ایمار [20] در ۱۹۶۴ بحث فوق را به گروه‌های غیرآبلی گسترش داد. درواقع در حالت آبلی همانند $\mathbb{R}$ جبرهای بالا قابل تعریف‌اند و

$$A(G) \cong L^{۱}(\hat{G}), \quad B(G) \cong M(\hat{G})$$

که در آن $\hat{G}$ گروه کاراکترهای G است یعنی

$$\hat{G} = \{\chi | \chi : G \longrightarrow T, \chi(xy) = \chi(x)\chi(y)\}$$

به ویژه آن که $L^{1}(\hat{G}) \cong L^{2}(\hat{G}) * L^{2}(\hat{G})$ [20].

ایدهٔ ایمار گسترش بحث‌های فوق به گروه‌های غیرآبلی بود. مقالهٔ ایمار نقش عمده‌ای در این گسترش دارد و مباحثی را وارد آنالیز همساز کرده است که هنوز هم بعد از سال‌های طولانی حاوی مسایل پژوهشی فراوان است.

به طور خلاصه، فرض کنید $\mathcal{H}$ یک فضای هیلبرت و $U(\mathcal{H})$ مجموعهٔ عمل‌گرهای یکانی روی $\mathcal{H}$ باشد یعنی

$$U(\mathcal{H}) = \{T | T : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}, \quad TT^* = T^*T = I\}$$

فرض کنید G یک گروه فشردهٔ موضعی است. $\pi : G \longrightarrow U(\mathcal{H})$ را یک نمایش یکانی می‌نامیم اگر $\pi(e) = I$، $\pi(x^{-1}) = \pi(x)^*$، $\pi(xy) = \pi(x)\pi(y)$ و به‌ازای هر $\xi \in \mathcal{H}$، $x \longrightarrow \pi(x)\xi$ پیوسته باشد. اگر A یک $*$ ــ جبر باناخ باشد، $\pi : A \longrightarrow B(\mathcal{H})$ را یک $*$ ــ نمایش ناتباهیده می‌نامیم، مشروط بر این که π یک همریختی باشد، $\pi(a^*) = \pi(a)^*$، به‌ازای هر $a \in A$، $\xi \in H$ وجود داشته باشد که $\pi(a)\xi \neq \circ$ و به‌ازای هر $\xi \in H$، $a \longrightarrow \pi(a)\xi$ پیوسته باشد. با توجه به این که $M(G)$ یک $*$ ــ جبر باناخ است هر نمایش یکانی π از G به صورت زیر به یک نمایش ناتباهیدهٔ

$$\pi(\mu) = \int_G \pi(x) d\mu(x)$$

توسیع می‌یابد و برعکس، اگر π یک نمایش ناتباهیدهٔ از $M(G)$ باشد آن‌گاه $\tilde{\pi}(x) = \pi(\delta_x)$ یک نمایش یکانی روی G است. تحدید $*$ ــ نمایش‌های ناتباهیده روی $M(G)$ نمایش‌های ناتباهیده روی $L^{1}(G)$ به دست می‌دهد. از این رو:

قضیه. یک تناظر ۱ــ۱ بین نمایش‌های یکانی G، $*$ ــ نمایش‌های ناتباهیدهٔ $M(G)$ و نیز $*$ ــ نمایش‌های ناتباهیدهٔ $L^{1}(G)$ وجود دارد.

فرض کنید Σ مجموعهٔ (ردهٔ هم‌ارزی) نمایش‌های یکانی پیوسته روی G باشد و $\mathcal{S} \subseteq \Sigma$. به‌ازای هر $\mu \in M(G)$ تعریف می‌کنیم:

$$\|\mu\|_S = \sup_{\pi \in S} \|\pi(\mu)\|$$

$\|\mu\|_S$ یک C^* ــ نیم نرم تعریف می‌کند. فرض کنید $f \in L^{1}(G)$ و

$$N_S = \{f | \pi(f) = \circ, (\pi \in \mathcal{S})\}$$

فرض کنید $\dot{f}$ تصویر f در $\frac{L^{1}(G)}{N_S}$ است و

$$\|\dot{f}\|_S = \|f\|_S$$

در این صورت $\|f\|_{\mathcal{S}}$ یک نرم تعریف می‌کند. $C^*_{\mathcal{S}}(G)$ تکمیل شدهٔ $\frac{L^1(G)}{N_{\mathcal{S}}}$ نسبت به این نرم را در نظر می‌گیریم. در حالتی که $\mathcal{S} = \Sigma$، $C^*_{\mathcal{S}}(G)$ را با $C^*(G)$ نمایش می‌دهیم که در واقع تکمیل شدهٔ $L^1(G)$ نسبت به نرم $\|f\|_\Sigma$ است و آن را C^* ـ جبر گروهی می‌نامیم و در حالتی که $\mathcal{S} = \{L\}$ نمایش منظم چپ باشد یعنی

$$L : x \longrightarrow L_x : G \longrightarrow U(L^2(G))$$
$$L_x f(y) = f(x^{-1}y)$$

$C^*_{\mathcal{S}}(G)$ با $C^*_r(G)$ نمایش می‌دهیم و C^* ـ جبر گروهی کاهش یافته می‌نامیم.

قضیه. گروه فشردهٔ موضعی G میانگین‌پذیر است اگر و فقط اگر $C^*(G) \cong C^*_r(G)$.

فرض کنید $P(G)$ مجموعهٔ تابع‌های مثبت معین پیوسته روی G باشد، یعنی

$$P(G) = \{u | u : G \longrightarrow \mathbb{C}, \sum c_n \bar{c}_m u(x_m^{-1} x_n) \geq 0 \, (c_n \in \mathbb{C}, x_n \in G)\}$$

خاصیت $P(G)$ در رسالهٔ گودمان در ۱۹۴۸ مورد بحث قرار گرفته است [20]، [28].

تعریف می‌کنیم:

$$B(G) = < P(G) >$$

در واقع، $B(G)$ مجموعهٔ همهٔ تابع‌های به شکل $x \longrightarrow < \pi(x)\xi, \eta > \, (\xi, \eta \in H_\pi)$ است که در آن π یک نمایش یکانی است. در این صورت،

$$B(G) = \{u | \|u\| = \sup_{f \in L^1(G), \|f\|_\Sigma \leq 1} | \int f(x) u(x) d\lambda(x) | < \infty\}$$

و $B(G)$ با نرم فوق و ضرب نقطه‌وار یک جبر باناخ جابجایی است.

قضیه. $B(G) = C^*(G)^*$ [20].

در این قضیه دوگانی بالا به صورت زیر است:

$$< f, u >= \int_G f(x) u(x) d\lambda(x)$$

تعریف. $A(G) = \overline{B(G) \cap C_c(G)}$. $A(G)$ با ضرب نقطه‌وار و نرم $B(G)$ یک جبر باناخ جابجایی است.

قضیه. $A(G) = L^2(G) * L^2(G)\tilde{}$ که در آن $\tilde{f}(x) = \overline{f(x^{-1})}$ تعریف می‌شود [20].

قضیه. G میانگین‌پذیر است اگر و فقط اگر $A(G)$ دارای یک واحد تقریبی باشد [20].

جبر A_π به عنوان یک زیرجبر $B(G)$ که فقط به وسیلهٔ یک نمایش تولید می‌شود توسط ارزاک در ۱۹۷۶ مورد بررسی قرار گرفته است [21]. توجه می‌کنیم که $A(G)$ و $B(G)$ کپی‌های ناجابجایی

$L^1(G)$ و $M(G)$ هستند. می‌دانیم که جبر مضروب‌های چپ $L^1(G)$، $M(G)$ است. اگر

$$T : L^1(G) \longrightarrow L^1(G) \quad T(f * g) = T(f) * g = f * T(g)$$

آن‌گاه T را یک مضروب می‌نامند. اگر این مجموعه را با $\mathcal{M}(L^1(G))$ نشان دهیم، آن‌گاه

$$\mathcal{M}(L^1(G)) \cong M(G),$$

به طوری که به‌ازای هر $T \in \mathcal{M}(L^1(G))$، $\mu \in M(G)$ی به طور منحصربه‌فرد وجود دارد که $Tf = f * \mu$ و $\|T\| = \|\mu\|$. سؤال این است که در حالت ناجابجایی چه اتفاق می‌افتد. فرض کنید $\mathcal{M}(A(G))$ جبر مضروب‌های $A(G)$ است که یک جبر جابجایی است، یعنی

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(A(G)) &= \{u : G \longrightarrow \mathbb{C}, uv \in A(G)(v \in A(G))\} \\ \|u\|_{\mathcal{M}(A(G))} &= \sup\{\|uv\| | v \in A(G), \|v\| \leq 1\} < \infty \end{aligned}$$

واضح است که $B(G) \subseteq \mathcal{M}(A(G))$ و $\|u\|_{\mathcal{M}(A(G))} \leq \|u\|$ $(u \in B(G))$.

قضیه [V., Losert, 1984]. G میانگین‌پذیر است اگر و فقط اگر $\mathcal{M}(A(G)) = B(G)$ [21].

در حالتی که G میانگین‌پذیر نباشد، $\mathcal{M}(A(G))$ بسیار بزرگ است. می‌دانیم که $A(G)^* = VN(G)$ که در آن $VN(G)$ جبر فون نویمن گروه G و برابر است با $< L_f | f \in L^2(G) >^{-\omega}$ که در آن $L_f g = f * g$.

در حالتی که G آبلی باشد، $VN(G) = L^\infty(\hat{G})$.

به جای $\mathcal{M}(A(G))$، هرس [21] ترجیح داد که جبر $\mathcal{M}_\circ(A(\mathcal{G}))$ از مضروب‌های کاملاً کراندار را مورد بررسی قرار دهد که به مضروب‌های هرس ـ شور معروفند. $u \in \mathcal{M}_\circ(A(G))$ اگر دارای یکی از شرایط هم‌ارز زیر باشد:

(i) فضای هیلبرتی مانند $\mathcal{H}$ و نگاشت‌های کرانداری مانند ξ و η از G به $\mathcal{H}$ موجود باشند که

$$u(y^{-1}x) = < \xi(x), \eta(y) > \quad (x, y \in G)$$

(ii) به‌ازای هر گروه فشردهٔ موضعی H، $u \otimes 1 \in \mathcal{M}(A(G \times H))$.

(iii) به‌ازای $H = SU(2)$، $u \otimes 1 \in \mathcal{M}(A(G \times H))$.

نرم u چنین تعریف می‌شود:

$$\|u\|_{\mathcal{M}_\circ A(G)} = \inf \sup_{x,y} \|\xi(x)\| \|\eta(y)\|$$

داریم $B(G) \subseteq \mathcal{M}_\circ(A(G)) \subset \mathcal{M}(A(G))$.

قضیه [Bozejko, M., 1985]. اگر G گسسته و غیرمیانگین‌پذیر باشد $B(G) \neq \mathcal{M}_\circ(A(G))$ و $\mathcal{M}_\circ(A(G)) \neq \mathcal{M}(A(G))$ وقتی که G یک گروه آزاد با دو مولد است [11].

بالاخره، نتیجه‌های زیر را در مورد $A(G)$ داریم

قضیه [Eymard, P., 1964]. $\Delta(A(G)) = G$ [فضای ایده‌آل ماکسیمال] [21].

قضیه [Forrest, B., Runde, V., 2004]. $A(G)$ میانگین‌پذیر است اگر و فقط اگر G تقریباً آبلی باشد یعنی دارای زیرگروهی آبلی مانند H باشد که G/H متناهی است [23]، [50].

قضیهٔ اخیر در واقع، حالت غیرجابجایی قضیهٔ جانسون است. همچنین جانسون در دههٔ ۹۰ طی مقاله‌هایی ثابت کرد $L^1(G)$ میانگین‌پذیر ضعیف است [34]. برهان او بعدها توسط قهرمانی و دیسپک به طور ساده‌تری ارائه گردید.

جانسون همچنین نشان داده بود که گروهی فشرده مانند G وجود دارد که $A(G)$ میانگین‌پذیر نیست. بحث‌های دیگر در مورد میانگین‌پذیری و میانگین‌پذیری ضعیف $M(G)^{**}$، $L^1(G)^{**}$، $A(G)^{**}$ وجود دارد که هنوز هم بعضی از مسائل آن‌ها باز است.

اخیراً مفهوم دیگری به نام میانگین‌پذیری تقریبی توسط قهرمانی و لوُی [1] Loy تعریف شده است که مورد توجه ریاضی‌دانان قرار گرفته است [25].

نیم‌گروه‌ها و ابرگروه‌های توپولوژیک

در این بخش به اجمال به پیشرفت‌های حاصل در مورد نیم‌گروه‌ها و ابرگروه‌ها اشاره می‌کنیم.

از نظر من بهترین کتاب دربارهٔ نیم‌گروه‌های جبری کتاب ارزشمند هوُی Howie [32] است. S را یک نیم گروه می‌نامیم در صورتی که نسبت به یک عمل شرکت‌پذیر بسته باشد مانند $(\mathbb{R}^+, +)$، $(\mathbb{N}, +)$، $([0, 1], \max)$.

به طوری که اشاره شد با القای یک توپولوژی روی نیم‌گروه S و برحسب پیوستگی این عمل از راست، چپ، دو طرف و یا به طور توأم، S به ترتیب نیم‌گروهِ راست توپولوژیک، چپ توپولوژیک، نیم‌توپولوژیک و توپولوژیک است.[7]

از یک سو نظریهٔ نیم‌گروه‌ها روی فضاهای توابع، فشرده‌سازی، $AP(S)$، $WAP(S)$، $\cdots$ توسیع یافت که بهترین مرجع در این مورد کتاب [7] است.

از سوی دیگر روی نیم‌گروه S جبر $l^1(S)$ تعریف شده است که:

$$l^1(S) = \{f | f : S \longrightarrow \mathbb{C}, \sum_{s \in S} |f(s)| < \infty\}$$

$l^1(S)$ با نرم و ضرب پیچشی زیر یک جبر باناخ است:

$$\|f\| = \sum_{s \in S} |f(s)|, \quad f * g(s) = \sum_{uv = s} f(u)g(v)$$

$l^1(S)$ در جاهای مختلف مورد بررسی قرار گرفته است و کتاب دانکل ورمیرز [16]، بهترین مرجع برای $l^1(S)$ است. یک دسته از نیم‌گروه‌ها نیم‌گروه‌های وارون است که ریشه در فضاهای هیلبرت دارد. نیم‌گروه S را وارون می‌نامیم اگر به‌ازای هر $s \in S$، t منحصربه‌فردی موجود باشد که

$$sts = s, \quad tst = t$$

بنا به تعریف عملگر $T \in B(H)$ را یک طولپای جزئی روی فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ می‌نامیم اگر TT^* یک تصویر باشد. در این صورت T^*T نیز یک تصویر است. از نظر هندسی T یک طولپای جزئی روی $\mathcal{H}$ است اگر وفقط اگر روی $\ker(T)^\perp$ یک طولپا باشد. حال اگر T یک طولپای جزئی باشد آن‌گاه

$$TT^*T = T, \quad T^*TT^* = T^*$$

که دقیقاً همان شرط نیم‌گروه وارون است [16]، [44].

میانگین‌پذیری نیم‌گروه‌ها و ارتباط بین نیم‌گروه‌های وارون و گروه‌واره‌ها در دو کتاب ارزشمند پاترسون [43]، [44] آمده است.

تعریف. فرض کنید S یک نیم‌گروه وارون است. اگر به‌ازای هر $s,t \in S$ خودتوانی مانند $e \in E(S)$ وجود داشته باشد که

$$es = et$$

گوییم $s\sigma_S t$. در این صورت σ_S یک همنهشتی روی S [رابطهٔ هم‌ارزی R روی S یک همنهشتی نامیده می‌شود اگر $(s,t) \in R$ و $u \in S$ نتیجه دهد $(su,tu) \in R$ و $(us,ut) \in R$] و $\frac{S}{\sigma_S}$ یک گروه است. این گروه را با $G(S)$ نمایش می‌دهیم.

قضیه [Duncan, J., Namioka, I., 1978]. نیم‌گروه وارون S میانگین‌پذیر است اگر و فقط اگر $G(S)$ میانگین‌پذیر باشد [44].

قضیه [Duncan, Namioka, 1978]. فرض کنید S یک نیم‌گروه وارون است. $l^1(S)$ میانگین‌پذیر است اگر و فقط اگر $E(S)$ متناهی و هر زیرگروه ماکسیمال S میانگین‌پذیر باشد.

در حالتی که S یک نیم گروه توپولوژیک باشد، جبر باناخ $L(S)$ به صورت زیر توسط بیکر و بیکر در [6] تعریف شده است:

$$L(S) = \{\mu \in M(S) | x \overset{\text{نرم پیوسته}}{\longrightarrow} |\mu| * \delta_x, x \overset{\text{نرم پیوسته}}{\longrightarrow} \delta_x * |\mu|\}$$

$L(S)$ تعمیم $L^1(G)$ به نیم‌گروه‌های توپولوژیک است. در این مورد نتیجه‌های زیادی توسط لشکری‌زادهٔ بمی به دست آمده و مقاله‌های ارزشمندی توسط ایشان چاپ شده است.

نتیجه‌های جدید

در مورد ابرگروه‌های توپولوژیک وارد بحث طولانی نمی‌شویم و خواستاران اطلاعات در این زمینه را به مقالهٔ خود در گزارش دوازدهمین سمینار آنالیز در گیلان ارجاع می‌دهیم [۵۷]. اما به چند نتیجه جدید اشاره می‌کنیم. در مقالهٔ [1]، $C^*(K)$، $A(K)$ و $B(K)$ را تعریف کرده‌ایم که در آن K یک ابرگروه است. کتاب ارزشمند بلوم و هییر [8] مرجع اصلی پیشرفت‌های آنالیز همساز روی ابرگروه‌ها است.

قضیه [Amini, M., and Medghalchi, A. R., 2004]. $B(K) \cong C^*(K)^*$.

مشکلی که در مورد ابرگروه‌ها وجود دارد این است که برخلاف گروه‌ها حاصل‌ضرب دو تابع مثبت معین ممکن است مثبت معین نباشد. در نتیجه در مقالهٔ اخیر مفهومی به نام ابرگروه‌های تانسوری را تعریف کرده‌ایم.

تعریف. (i) گوییم K دارای خاصیت P است اگر $P(K)$ [مجموعهٔ تابع‌ها مثبت معین] نسبت به ضرب بسته باشد.

(ii) گوییم K یک C ــ تانسور ابرگروه است اگر به‌ازای هر دو نمایش (π_i, H_i) و بردارهای $\xi_i, \eta_i \in H_i$ $(i = ۱, ۲)$ نمایشی مانند $(\pi_{۱,۲}, H_{۱,۲})$ از K و بردارهای $\eta_{۱,۲} \in H_{۱,۲}$ ، $\xi_{۱,۲}$ وجود داشته باشد که

$$< \pi_{۱۲}(x)\xi_{۱۲}, \eta_{۱۲} >=< \pi_۱(x)\xi_۱, \eta_۱ >< \pi_۲(x)\xi_۲, \eta_۲ >$$

و

$$\max(\|\xi_{۱۲}\|, \|\eta_{۱۲}\|) \leq C \max(\|\xi_۱\|, \|\eta_۱\|) \max(\|\xi_۲\|, \|\eta_۲\|)$$

اگر $C = ۱$، آن‌گاه K را یک ابرگروه تانسوری می‌نامیم.

در این حالت $B(K)$ و $A(K)$ جبرهای باناخ جابجایی هستند. در [1] چند مثال مورد بررسی قرار گرفته است.

قضیه [Amini, M., and Medghalchi, A.R., 2004]. [تعمیم قضیهٔ گودمان] به‌ازای هر $u \in P(K)$ با محمل فشرده، $\xi \in L^۲(K)$ وجود دارد که $u = \xi * \tilde{\xi}$ که در آن $\tilde{\xi}(x) = \overline{\xi(\tilde{x})}$ و $x \longrightarrow \tilde{x}$ برگشت ابرگروه است [1].

در مورد نیم‌گروه‌ها به چند نتیجه جدید خود اشاره می‌کنیم.

C^* ـ جبر نیم‌گروهی، جبرهای فوریه و فوریه استیلتیس را روی نیم‌گروه‌های توپولوژیک تعریف کرده و چند نتیجه نظیر گروه‌های توپولوژیک به دست آورده‌ایم [2]. فرض کنید (π_u, H_u) نمایش جهانی از S باشد. در اینجا $W^*(S) = \pi_u(C^*(S))''$ [جابجاکننده دوم] را تعریف کرده‌ایم.

قضیه [Amini, M., and Medghalchi, A.R., 2004].

فرض کنید S یک $*$ ــ نیم‌گروه اساسی با عضو واحد باشد که $\sum$، ردهٔ هم‌ارزی نمایش‌های

تحویل ناپذیر نقاط S را جدا می‌کند در این صورت $L(S)$ و $M(S)$ و $C^*(S)$ به طور طولپا در $W^*(S)$ می‌نشینند [2].

قضیه [Amini, M., and Medghalchi, A.R., 2004]. با شرط‌های قضیهٔ قبل $B(S) \cong C^*(S)^*$ [2]. در این مقاله نظیر جبر نیم‌گروهی فون نویمن را تعریف کرده‌ایم و آن را $VN(S)$ نامیده‌ایم و نشان داده‌ایم که:

$$W^*(S) = A(S)^\perp \oplus VN(S)$$

متأسفانه بحث دربارهٔ نیم‌گروه‌ها بسیار مشکل است. مثلاً هنوز ثابت نکرده‌ایم که $\sigma(A(S)) = S$. در یک مقالهٔ دیگر با امینی میانگین‌پذیری دو جبر دیگر یعنی $\mathcal{F}(\mathcal{S})$ و $\mathcal{R}(\mathcal{S})$ را مورد مطالعه قرار داده‌ایم که به اجمال اشاره می‌شود.

تعریف [[35] ,Lau, A.T. 1978]. فرض کنید M یک W^* ــ جبر و M_1 گوی واحد آن و (w, M) یک $*$ ــ نمایش از S به M_1 باشد. فرض کنید $\sigma = \sigma(M, M_*)$ و $\Omega(S)$ مجموعهٔ همهٔ $*$ ــ نمایش‌های پیوسته S باشد که $M = \overline{w(S)}^\sigma$. $\mathcal{F}(S)$ را به صورت:

$$\mathcal{F}(S) = \{f | f = \hat{\psi} \quad (\text{وجود دارد } \psi \in M_*)\}.$$

که در آن $\hat{\psi} = \psi \circ w$، و نرم $f \in \mathcal{F}(S)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\|f\|_\omega = \inf\{\|\psi\| \; |\psi \in M_*, \hat{\psi} = f \quad \text{وجود دارد که } (w, M) \in \Omega(S)\}.$$

قضیه [Lau, A.T., 1978]. $\mathcal{F}(S)$ با نرم بالا یک $*$ ــ جبر نرمدار جابجایی است و $\mathcal{F}(S) \subseteq WAP(S)$، که در آن بنا به تعریف $f^*(s) = \overline{f(s^*)}$. $\mathcal{F}(S)$ تحت انتقال و مزدوج‌گیری بسته است. ثابت کرده‌ایم که اگر S دارای واحد باشد $B(S) = \mathcal{F}(S)$ [35]، [2].

فرض کنید $Y = \sigma(\mathcal{F}(S))$ طیف $\mathcal{F}(S)$ است. Y یک نیم گروه است. فرض کنید $K(Y)$ ایده‌آل مینیمال $\mathcal{F}(S)$ است.

قضیه [Amini, M. and Medghalchi, A.R., 2004]. جبر $\mathcal{F}(\mathcal{S})$ میانگین‌پذیر است اگر و فقط اگر $K(Y)$ یک گروه توپولوژیک باشد [3].

تعریف [Dunkl, C.F. and Ramirez, C.F., 1975]. فرض کنید μ یک اندازهٔ احتمال روی فضای اندازه‌پذیر X است. یک L^∞ ــ نمایش، (T, X, μ) از S عبارت است از هم‌ریختی w^* ــ پیوسته T از S به گوی واحد $L^\infty(X, \mu)$. در این صورت $R(S)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$R(S) = \{f | f(x) = \int_X T_x(g) d\mu, \quad (g \in L^1(X, \mu))\}$$

که در آن (T, X, μ) یک L^∞ ــ نمایش S است [16].

ثابت شده که $R(S)$ علاوه بر این که یک زیرجبر نرمدار $\mathrm{WAP}(S)$ با ضرب نقطه‌ای است، تحت انتقال پایا و نسبت به مزدوج‌گیری بسته است. به علاوه این جبر شامل توابع ثابت و با نرم $\|f\| = \inf_g \|g\|_1$ کامل است.

توجه شود که $\mathcal{F}(S)$ براساس $R(S)$ تعریف شده است. اگر S آبلی باشد $\mathcal{F}(S) \subseteq R(S)$، و اگر G یک گروه توپولوژیک آبلی باشد آنگاه

$$\mathcal{F}(G) = R(G) = \widehat{M(\hat{G})}$$

قضیه [Amini, M., Medghalchi, A.R., 2004]. احکام زیر هم‌ارزند [3]:

(a) $R(S)$ میانگین‌پذیر است.

(b) $\mathcal{F}(S)$ میانگین‌پذیر است.

(c) $\overline{R(S)}$ میانگین‌پذیر است.

(d) $\overline{\mathcal{F}(S)}$ میانگین‌پذیر است.

در مورد $l^1(S)$ با یک پیچش دیگر با همکاری امینی کارهای متعددی انجام شده که جبرهای باناخ تحدید شده نامیده‌ایم و به‌تدریج به صورت مقاله چاپ می‌شوند [4].

در پایان به دو مبحث دیگر اشاره می‌کنیم. نتیجه‌های این مبحث یکی بر روی نیم‌گروه‌ها و دیگری بر روی گروه‌ها است. ولی با توجه به ارتباط آن‌ها با $AP(S)$ و $WAP(S)$ این نتیجه‌ها را به اجمال بررسی می‌کنیم.

فرض کنیم S یک نیم گروه توپولوژیک است. (ψ, X) را یک فشرده‌سازی نیم‌گروهی S می‌نامیم اگر X یک نیم گروه راست توپولوژیک فشرده و هاسدورف و $\psi : S \longrightarrow X$ یک هم‌ریختی پیوسته باشد، $\psi(S)^- = X$ و $\psi(S) \subseteq \Lambda(X)$ که در آن

$$\Lambda(X) = \{t \in X | s \longrightarrow ts : X \longrightarrow X\}.$$

فرض کنید X یک مجموعه و l یک رابطه روی X است. تعریف می‌کنیم:

$$l^\infty = \{l^n | n \geq ۱\}$$

که در آن $l^n = l \circ l \circ \ldots \circ l$ و $l^e = (l \cup l^{-۱} \cup ۱_X)^\infty$. بنابر [41]، l^∞ یک رابطهٔ هم‌ارزی تولید شده توسط l است یعنی $(x, y) \in l^\infty$ اگر و فقط اگر $x = y$ و یابه‌ازای nی در N دنباله‌ای مانند (Z_n) وجود دارد که $Z_۱ = x$، $Z_n = y$ و $(Z_i, Z_{i+۱}) \in l$ و یا $(Z_{i+۱}, Z_i) \in l$، $۱ \leq i \leq n - ۱$. فرض کنید S و T دو نیم‌گروه توپولوژیک و X یک فضای توپولوژیک ناتهی است. Y را یک S ـ سیستم چپ توپولوژیک می‌نامیم اگر $S \times X \longrightarrow X$، $(s, x) \longrightarrow sx$ به طور توأم پیوسته باشد. به طریق مشابه S ـ سیستم راست توپولوژیک را تعریف می‌کنیم. به همین ترتیب، (S, T) یک دو سیستم توپولوژیک است اگر S ـ سیستم چپ توپولوژیک و T ـ سیستم راست توپولوژیک باشد و $(s \in S, t \in T, x \in X)(sx) = s(xt)$. فرض کنید X و Y دو S ـ سیستم چپ است. می‌گوییم نگاشت پیوستهٔ $\phi : X \longrightarrow Y$ یک S ـ نگاشت چپ است اگر $\phi(sx) = s\phi(x)$، $(s \in S, x \in X)$. X، Y و Z به ترتیب یک (S, U)، (U, T) و (S, T) دو سیستم توپولوژیک باشند. فرض کنید فضای

$X \times Y$ با توپولوژی حاصل‌ضربی مجهز شده است. فرض کنید $\beta : X \times Y \longrightarrow Z$ یک (S,T) نگاشت است [یعنی β یک S نگاشت چپ توپولوژیک و یک T نگاشت راست توپولوژیک است.] گوئیم β یک دو نگاشت دو توپولوژیک است اگر

$$\beta(xu, y) = \beta(x, uy)$$

فرض کنید (ψ, X) فشرده‌سازی S با یک خاصیت فشرده‌سازی است. در این صورت X را می‌توان یک Sـسیستم چپ [راست] توپولوژیک نامید که در آن $sx = \psi(s)x$، $(x \in X, s \in S)[xs = x\psi s)]$.

فرض کنید $\{S_i\}_{1 \leq i \leq n}$ خانواده‌ای از نیم‌گروه‌های توپولوژیک است و $\sigma_i : S_i \longrightarrow S_{i+1}$ $(1 \leq i \leq n-1)$ هم‌ریختی‌های پیوسته‌اند. در این صورت S_i با عمل ضرب نیم گروه، یک (S_{i-1}, S_i) دو سیستم و با عمل $(s_{i-1}, s_i) \longrightarrow \sigma(s_{i-1})s_i$، $(1 \leq i \leq n, s_i \in S_i, s_{i-1} \in S_{i-1})$ یک (s_{i-1}, s_i) دو سیستم است. در این صورت، نگاشت

$$\xi : S_1 \times \ldots S_n \longrightarrow D$$

یک n ـ نگاشت توپولوژیک نامیده می‌شود اگر داشته باشیم:

$$\xi(s_1, \ldots, x_{i-1}, s_i s'_{i+1}, s_{i+1}, \ldots, s_n) \longrightarrow \xi(s_1, \ldots, s_i), \sigma_i(s'_i)s_{i+1}, \ldots, s_n)$$

که در آن D یک (s_1, s_n) ـ دو سیستم توپولوژیک است.

سرانجام زوج (P, ψ) حاصل‌ضرب تانسوری تعمیم یافتهٔ توپولوژیک از S_1، ...، S_n نامیده می‌شود اگر P یک (S_1, S_n) دو سیستم، $\psi : S_1 \times \ldots \times S_n \longrightarrow P$. یک n ـ نگاشت توپولوژیک باشد به طوری که به‌ازای هر (S_1, S_n) دو سیستم D و هر n ـ نگاشت توپولوژیک $\gamma : S_1 \times \ldots \times S_n \longrightarrow D$ یک (s_1, s_n) نگاشت منحصربه‌فرد مانند

$$\bar{\gamma} : P \longrightarrow D$$

باشد به طوری که دیاگرام زیر تعویض‌پذیر باشد

$$\begin{array}{ccc} S_1 \times \ldots S_n & \stackrel{\psi}{\longrightarrow} & P \\ \downarrow \gamma & \nearrow_{\bar{\gamma}} & \\ D & & \end{array}$$

قضیه [Medghalchi, A.R., Rahimi, H.R., 2005]. حاصل‌ضرب تانسوری S_1، ...، S_n وجود دارد.

حالت‌های $n = 2$، $n = 3$ در مقالهٔ ۲۰۰۴ چاپ شده است [36].

قضیه. اگر (ψ_i, X_i) فشرده‌سازی نیم‌گروهی توپولوژیک واحددار S_i باشد، آن‌گاه $X_1 \otimes_{\eta_1} \ldots \otimes_{\eta_n} X_n$ فشرده‌سازی نیم‌گروهی توپولوژیک $S_1 \otimes_{\sigma_1} \ldots \otimes_{\sigma_{n-1}} S_n$ است که در آن

$S_{j+1} \longrightarrow S_j : \sigma_j$، $\eta_j : X_j \longrightarrow Y_{j+1}$ هم‌ریختی‌های پیوسته‌اند و $\psi_{j+1} \circ \sigma_j = \eta_j \circ \psi_j$ [36]، [37].

نتیجه.

$$(S_1 \otimes_{\sigma_1} S_2 \otimes_{\sigma_2} \ldots \otimes_{\sigma_{n-1}} S_n)^{ap} \simeq S_1^{ap} \otimes_{\sigma_1} \ldots \otimes_{\sigma_{n-1}} S_n^{ap}$$

در این مقاله‌ها نتیجه‌های دیگری نیز در مورد ایده‌آل‌ها حاصل‌ضرب تانسوری و رابطهٔ آنها با ایده‌آل‌های نیم‌گروه‌ها مورد بحث قرار گرفته است.

آخرین مطلبی که در مورد $L^1(G)$ بیان می‌شود به مقالهٔ مشترک با عبادیان اشاره دارد. ایدهٔ اصلی از جبرهای باناخ حقیقی گرفته شده و $L^1(G,\tau)$ تعریف شده است که در آن $\tau : G \longrightarrow G$ یک هم‌ریختی گروهی است و $\tau^2 = 1$. در این صورت

$$L^1(G) = L^1(G,\tau) \oplus iL^1(G,\tau)$$

اندازهٔ هار روی $L^1(G,\tau)$ و میانگین‌پذیری $L^1(G,\tau)$ مورد مطالعه قرار گرفته است. ثابت شده است که $L^1(G)$ میانگین‌پذیر است اگر و فقط اگر $L^1(G,\tau)$ میانگین‌پذیر باشد [17]، [18].

تشکر و قدردانی. از داوران محترم و نیز ویراستار مجله آقای دکتر محمد جلوداری ممقانی به علت ارائهٔ پیشنهادات ارزنده تشکر و قدردانی می‌نمایم.

مراجع

[1] Amini, M. and Medghalchi, A. R., Fourier algebras on tensor hypergroups, Contemporary Mathematics, Volume 363(2004) A. M. S.

[2] ——, ——, Fourier algebras on topological foundation *-semigroups, Semigroup Forum, Vol. 68(2004) 322-334.

[3] ——, ——, Amenability of algebras $R(S), \mathcal{F}(\mathcal{S})$ of a topological semigroup, Scientiae Mathematicae Japonicae, 60, No. 3(2004) 469-473.

[4] ——, ——, Restricted algebras on inverse semigroups I, representation theory, Math. Nachr. 279, No.16, 1-10 (2006).

[5] Atiyah, Sir Michael, Mathematics in the 20th century, Bull. London Math. Soc. 34(2002) 1-15.

[6] Baker, A. C., and Baker, J. W., Algebras of measures on a locally compact semigroup III, J. London Math. Soc. (2) 4(1972) 685-695.

[7] Berglund, John F., Junghen, Hugo D., and Milnes Paul, Analysis on semigroups, Wiley, 1989.

[8] Bloom W. R., Heyer H., Harmonic Analysis of Probability Measures on Hypergroup, Walter de Gruyter Berlin, New York, 1995.

[9] Bohr, H., Zur Theorie der Fastperiodischen Funktionen I-III, Acta Math. 45(1925) 29-127, ibid 46(1925) 101-214, 47(1926) 237-281.

[10] Burkardt, H., Trigonometrishe Reihen und Integrale bisetwa 1850, Encyklopädie der Math. Wiss, Bd. II, Teil I, pp. 819-1354, Leipzig: Teubner 1899-1915.

[11] Bozejko, M., Positive definite bounded matrices and a characterization of amenable groups, Proc. Amer. Math. Soc. 95(1985) 357-360.

[12] Cartan, H., Sur la measure de Haar, C. R. Acad. Sci. Paris 211(1940) 759-762.

[13] Dales, H. G., Banach algebras and automatic continuity, Clarendon Press. Oxford 2000.

[14] Day, M. M., Amenable semigroups, Illinois J. Math. 1(1957) 509-544.

[15] Duncan, J. and Namioka, Amenability of inverse semigroups and their semigroup algebras, Proc. Royal Soc. Edinburgh, Sect. A., 80, 309-21.

[16] Dunkl, Charles, F. and Ramirez, Donald, E., Representation of commutative semitopological semigroups, Lecture Notes in Mathematics, 435 (1975) Springer-Verlag.

[17] Ebadian, A. and Medghalchi, A. R. Real group algebras, Iranian Journal of Science and Technology, Transaction A, Vol. 28(2004) No. A2, 289-298.

[18] Ebadian A., Real Lipschitz algebras and real group algebras, Ph.D. thesis 2000.

[19] Eberlin, W. F., Abstract ergodic theorems and weak almost periodic functions, Trans. Amer. Math. Soc. 67 (1949) 217-240.

[20] Eymard, P. L'algebra de Fourier d'un groupe localement compact, Bull. Soc. Math. France 92(1964) 181-236. Translated by Pourabdollah, M. A. into the English (2003).

[21] —— , A survey of Fourier algebras, Contemporary Mathematics, Volume 183, 1995 A.M.S.

[22] Folland, G. B., A course in abstract harmonic analysis CRC Press, Inc., 1995.

[23] Forrest, B., and Runde, V., Amenability and weak amenability of the Fourier algebra. Math. Z., 250(2005) 731-744..

[24] Gaffari, A., Multiplier and operators on semigroup and hypergroups and their second duals, Ph.D Thesis (Farsi) 2002.

[25] Ghahramani, F., Loy, R. J., Generalized notions of amenability, J. Functional Analysis, 208(2004) 229-260.

[26] Ghahramani, F., Loy, R. J., and Willis J., Amenability and weak amenability of second conjugate Banach algebras, Proc. Amer. Math. Soc. 124 (1996) 1489-1497.

[27] Greenleaf, F. P., Invariant means on topological groups, Van Nostrand, New York, 1969.

[28] Godement, R., Les fonctions de type positif et la théorie des groups, Trans. Amer. Math. Soc. 63 (1948) 1-84.

[29] Hewitt, E., and Ross, K. A., Abstract harmonic analysis I,II, Springer-Verlag 1987.

[30] Hewitt, E., and Stromberg, Real and abstract analysis, Graduate Texts in Mathematics, Springer 1969.

[31] Higgins, J. R., Sampling theory in Fourier and singal analysis foundations, Clarendon Press. Oxford, 1996.

[32] Howie John M., Fundamentals of semigroup theory, Clarendon Press. Oxford 1995.

[33] Johnson, B. E., Cohomology in Banach algebras, Mem. Amer. Math. Soc. 127 (1972) 1-101.

[34] ——, Weak amenability of group algebras, Bull., London Math. Soc. 23 (1991) 281-284.

[35] Lau, A. T., The Fourier Stieltjes algebra of a topological semigroup with involution, Pacific Journal of Mathematics, Vol. 77, No. 1(1978) 165-181.

[36] Medghalchi, A. R., and Rahimi, H. R., Topological tensor products of topological semigroups and their compactifications, Scientiae Mathematicae Japonicae, 62, No. 1(2005) 57-64.

[37] ——— , ——— , The space of functions and the ideal structures on the generalized topological tensor products of topological semigroups (Preprint 2005).

[38] Milnes, P., Pym J. S., Function spaces on semitopological semigroups, Semigroup Forum 19(1980) 347-354.

[39] Modarres Mosaddeg, S. M. S., Topological center and amenability of hypergroup algebras, measure algebras and related topics, Ph.D Thesis 1999.

[40] Neumann John, von, Almost periodic functions in a group I, Transactions of the Amer. Math. Soc. 36(1934) 445-492.

[41] ——— , The uniqueness of Haar's measure, Math. Sb 1, 43(1936) 721-734.

[42] ——— , Collected works, 6 Vols, Pergamon Press. Oxford 1961-1963.

[43] Paterson, Allan L. T., Amenability, Mathematical Surveys and Monographs 29, 1988.

[44] ——— , Groupoids, Inverse Semigroups, and their Operator Algebras, .Birkhäuser, 1998.

[45] Pier, J. P. Amenable locally compact groups, Academic Press, 1984.

[46] Pourbarat, Left amenability of groups and hypergroups (Farsi), Ph.D Thesis, 1996.

[47] Reiter, H., and Stegman, J. D., Classical hamonic analysis and locally compact groups, Oxford University Press, 2000.

[48] Rosenberg, Jonathan, A Panorama of Hungarian Mathematics in the Twentieth Century, Non-Commutative Hamonic Analysis (Preprint 2001).

[49] Rudin, W., Fourier analysis on groups (Second Edition), McGraw-Hill, 1991.

[50] Runde, V., Lectures on Amenability, Springer-Verlag, 2002.

[51] Weil, H., L, Intégration dans les Groupes Topologioues et ses Applications, Hermann, Paris 1940.

[52] Wiener, Norbert, Generalized harmonic analysis , Acta Math. 55(1930) 117-258.

[53] Wigner, E. P. Collected Works, ed. by Wightman, Part A, Volume 1, Springer-Verlag, Berlin, New York 1993.

[54] Zabandan, G. Amenability, Weak and 2-Weak Amenability of Weighted Convolution Algebras, Ph.D. Thesis, 2004.

[55] Zygmund, A., Trigonometric series, 2nd Edition, 2 vols, Cambridge University Press.

[۵۶] علیرضا مدقالچی، آنالیز هارمونیک از کجا شروع شده است و به کجا می‌رود، همایش ماهانه انجمن ریاضی ایران، ۱۳۷۸.

[۵۷] علیرضا مدقالچی، آنالیز هارمونیک روی ابرگروه‌های توپولوژیک، مجموعهٔ مقاله‌های دوازدهمین سمینار آنالیز ریاضی و کاربردهای آن، ۱۳و۱۴ بهمن ماه ۸۰، دانشگاه گیلان.

[۵۸] علیرضا مدقالچی، پژوهش در ریاضیات، مجلهٔ فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی شمارهٔ ۳۴، بهار ۱۳۸۴.

علیرضا مدقالچی
دانشگاه تربیت معلم تهران، دانشکدهٔ علوم ریاضی و کامپیوتر
a_medghalchi@saba.tmu.ac.ir