فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی

سال ۴۴، شمارهٔ ۲ (پاییز و زمستان ۱۴۰۴)، صص ۱ تا ۲۶

آکادمی افلاطون و کتاب اصول اقلیدس

سیاوش شهشهانی

چکیده. هزارهٔ ریاضیات یونان باستان را می‌توان به سه دوره تقسیم کرد. دورهٔ اول، دو سدهٔ پنج و شش قبل از میلاد را فرامی‌گیرد و دورهٔ دوم عمدتاً شامل قرن چهارم تا آغاز قرن سوم پیش از میلاد است. انتهای این دوره مصادف با انتقال مرکزیت پژوهش ریاضی از آکادمی افلاطون واقع در شمال آتن به اسکندریه و نگارش کتاب [1]اصول اقلیدس است. ریاضیات این دوره و شیوهٔ ارائهٔ آن در کتاب اقلیدس که می‌توان آن را سرمشق و پارادایم غالب ریاضیات طی قرن‌های بعدی تلقی کرد، موضوعِ اصلی متن پیش رو است. دورهٔ طولانی سوم که به آن نخواهیم پرداخت، شاهد پیشرفت‌ها و کشفیات مهمی در ریاضیات است، ولی چارچوب کلی و فلسفیِ تفکّر ریاضی، میراث همان دورهٔ دوم است.

از آنجا که اصطلاح «ریاضیات یونانی» در این نوشته مکرر به‌کار گرفته خواهد شد، در آغاز لازم است که مقصودمان را از این اصطلاح مشخص کنیم. مراد ما مجموعهٔ آثار ریاضیاتی به زبان یونانی است که طی حدود یک هزاره از قرن ششم پیش از میلاد تا قرن چهارم پس از میلاد، پدید آمده است. آثار هشت سدهٔ آخر این هزاره به‌صورت مکتوب ظاهر شده‌اند؛ هرچند از بعضی از آنها نسخه‌ای پیدا نشده است. در مورد دو سدهٔ نخست که احتمالاً ارتباط شفاهی، شیوهٔ غالب مراودهٔ علمی بوده است، انتساب «یونانی» به‌دلیل ارجاع‌های بعدیِ یونانی‌زبان به این دوره، و احتمال یونانی‌زبان

عبارات و کلمات کلیدی: ریاضیات یونانی، آکادمی افلاطون، اصول اقلیدس، عدد و نسبت، الگوریتم اقلیدسی، روش افنا، احجام افلاطونی

نوع مقاله: پژوهشی؛ تاریخ دریافت: ۱۴۰۴/۷/۲۶؛ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۴/۹/۱۰

این نوشته صورت کامل سخنرانی‌های نویسنده در خانه ریاضیات اصفهان (به‌تاریخ ۲۵ اردیبهشت ۱۴۰۴) و دانشگاه تربیت مدرس (به‌تاریخ ۳۰ اردیبهشت ۱۴۰۴) است.

 doi: 10.30504/mct.2025.1579.2112

بودنِ ریاضی‌پیشگان یا دست‌کم استفادهٔ آنان از زبان یونانی به‌عنوان واسط مشترک یا زبان علمیِ رایج است. اینکه کدام ریاضی‌دان را باید واقعاً یونانی دانست، بستگی به ضابطهٔ اتخاذشده دارد. علاوه بر ناحیه‌ای که امروزه یونان خوانده می‌شود (شامل جزایر دریای اژه)، زبان یونانی در غرب شبه‌جزیرهٔ آناتولی نیز رایج بوده است. البته امتزاج اجتماعی و فرهنگی در سراسر شرق مدیترانه میان یونانیان، فنیقیان، مصریان و سایر اقوام معمول بوده است. به‌خصوص در هفت سدهٔ آخر مورد بحث، یعنی دورهٔ مرکزیت اسکندریه در فعالیت ریاضی، بعید نیست که اکثر ریاضی‌دانان معروف یونانی‌نویس، از سرزمین فعلی یونان گذر نکرده باشند. ظاهر یونانیِ اسامی خاص نیز ناشی از تمایل به یونانی‌سازیِ[1] اسامی است؛ پدیده‌ای که مشابه آن در بسیاری فرهنگ‌ها و زبان‌ها رایج بوده است. به همین سیاق است که رشدی راشد، مورّخ علمی برجستهٔ معاصر، از ریاضیات دورهٔ تمدن اسلامی به‌عنوان «ریاضیات عربی» سخن می‌گوید به این اعتبار که تقریباً همهٔ آثار به زبان عربی نگاشته شده و اسامی شخصیِ معرّب اتخاذ شده‌اند؛ هرچند که ریاضی‌دانان عربِ آن دوره، به هر تعبیر، اقلیّتی بیش نبوده‌اند.

هزارهٔ ریاضیات یونان باستان را می‌توان به سه دوره تقسیم کرد. از دورهٔ اول که دو سدهٔ پنج و شش قبل از میلاد را فرامی‌گیرد، اثر مکتوبی بجز قطعاتی در آثار اخلاف این دوره بر جای نمانده است، ولی شواهد زیادی وجود دارد که نشان می‌دهند استدلال ریاضی در این دوره شکل یافته و شناخت ریاضیات به‌عنوان یک فعالیت مستقل در این دوره صورت گرفته است. مشهورترین ریاضی‌دانان این دوره، تالس (حوالی ۶۲۵–۵۴۵ پیش از میلاد) و فیثاغورس (حوالی ۵۷۰–۴۹۵ پیش از میلاد) هستند. می‌توان حدس زد که مایهٔ اصلی هندسیِ چهار فصل اول از سیزده فصل کتاب \اصول اقلیدس و نیز بخش‌هایی از مباحث حسابی در فصل‌های هفت، هشت و نُه، میراث این دوره است. البته افکار فلسفی فیثاغورس و پیروان او قرن‌ها مورد بحث و جدل بوده است و گاهی همین افکار در دیدگاه‌های دوره‌های بعدی هم نسبت به ریاضیات مطرح می‌شود. دورهٔ دوم عمدتاً شامل قرن چهارم تا آغاز قرن سوم پیش از میلاد است. انتهای این دوره مصادف با انتقال مرکزیت پژوهش ریاضی از آکادمی افلاطون واقع در شمال آتن به اسکندریه و نگارش کتاب \اصول اقلیدس است. ریاضیات این دوره و شیوهٔ ارائهٔ آن در کتاب اقلیدس که می‌توان آن را سرمشق و پارادایم غالب ریاضیات طی قرن‌های بعدی تلقی کرد، موضوع اصلی گفتگوی حاضر است. یک وجه مهم این دوره حضور پُررنگ فلاسفهٔ بزرگ، افلاطون و ارسطو، در جوار ریاضی‌کاران و تأثیر

1. Hellenization

متقابل ریاضیات و فلسفه است. دورهٔ طولانی سوم که به آن نخواهیم پرداخت، شاهد پیشرفت‌ها و کشفیات مهمی در ریاضیات است، ولی چارچوب کلی و فلسفیِ تفکّر ریاضی، میراث همان دورهٔ دوم است. باید از اسامی ارشمیدس (حوالی ۲۸۷–۲۱۲ پیش از میلاد)، آپولونیوس (حوالی ۲۶۲–۲۰۰ پیش از میلاد)، دیوفانتوس (دورهٔ فعالیت علمی او را بین ۲۵۰–۲۷۰ میلادی حدس می‌زنند) و پاپوس (حوالی ۲۹۰–۳۵۰ میلادی) به‌عنوان معروف‌ترین چهره‌های دورهٔ سوم نام بُرد. به‌استثنای ارشمیدس، که ساکن سیراکیوز شهر یونانی‌نشین جزیرهٔ سیسیل بود، سه ریاضی‌دان دیگر در اسکندریه فعال بودند.

۱ آکادمی افلاطون

آغاز قرن چهارم پیش از میلاد یا به‌طور دقیق‌تر، سال ۳۹۹ مصادف است با شوکران نوشیدن سقراط و مرگ او. افلاطون (حوالی ۴۲۷–۳۴۷ پیش از میلاد) که از مریدان سقراط است، در آن زمان حدود ۲۸ سال سن دارد و در باقیماندهٔ عمر طولانی خود، حدود ۳۰ اثر فلسفی، معروف به «گفتگوهای افلاطون»،[1] پدید می‌آورد که سرآغاز فلسفهٔ مکتوب غربی تلقّی می‌شود. در تقریباً همهٔ این گفتگوها سقراط نقش متکلم اصلی را دارد. به‌گفتهٔ آلفرد نورث وایتهد،[2] از نظر تنوع مسائل طرح‌شده می‌توان تمامی سنّت فلسفهٔ غرب را زیرنویسی بر آثار افلاطون تلقی کرد.[3] آنچه به ما مربوط می‌شود، جایگاه برجستهٔ ریاضیات در آثار افلاطون و احداث آکادمی معروف اوست که به‌مدت حدود نیم قرن کانون فعالیت‌های ریاضیاتی در جهان باستان بود. آکادموس یک قهرمان نیمه‌افسانه‌ای در فرهنگ رایج آتنیان بود که گفته می‌شد در جنگی در شمال آتن با مهاجمان اسپارتی، قشون اسپارت را شکست داده و مانع از تسخیر آتن شده است. از این‌رو ناحیه‌ای در شمال آتن، آکادموس نامیده می‌شد. افلاطون که از طبقهٔ اشراف آتن بود، وارث زمینی در آن ناحیه شد و احتمالاً حدود سال ۳۸۷ پیش از میلاد، اقدام به تأسیس مرکزی برای گردهمایی دانشمندان و فلاسفه در آن مکان کرد. این تجمع‌گاه است که به آکادمی افلاطون معروف شده است و مشتقات کلمهٔ آکادمی از آن ساخته شده‌اند. به نظر می‌آید که در زمان حیات افلاطون، ریاضیات به‌ویژه ریاضیات محض که به دلایل فلسفی مورد تأکید افلاطون بوده است، منزلت ویژه‌ای در آکادمی داشته به‌گونه‌ای که محتمل است بیشتر مطالب پیشرفته‌ترِ کتاب اصول اقلیدس، دستاورد پنجاه سال فعالیت آکادمی بوده باشد. طبق روایاتی،

۳. نقل از Whitehead, A. N., *Reality and Process*, Free Press, 1979 صفحهٔ ۳۹.

1. Dialogues of Plato 2. Alfred North Whitehead

اقلیدس قبل از اقامت در اسکندریه، مدتی را در آکادمی افلاطون سر کرده است. طبق شواهد و روایات نقل‌شده از ریاضی‌دانان و مورّخان دوران بعدی، دو ریاضی‌دانِ آن دوره سرآمد و پیشتاز دیگران در آکادمی بوده‌اند: اِئودُکسوس[۱] از اهالی شهر کنیدوس[۲] در آناتولی غربی و ته‌آتتوس[۳] اهل آتن. اِئودُکسوس شیوهٔ مقایسهٔ نسبت کمیّت‌های پیوسته (ناگویا) را مطرح می‌کند که در آغاز فصل پنجم کتاب اقلیدس آمده است و ممکن است است الهام‌بخش ریچارد ددکیند[۴] در تعریف بُرش ددکیند در ساختمان اعداد حقیقی در قرن نوزدهم میلادی بوده باشد.[۵] همچنین او پایه‌گذار روش افنا[۶] است که از آن طریق، مساحت دایره و حجم هرم، مخروط و کره را بررسی می‌کند. اِئودُکسوس پس‌از مدتی به زادگاه خود بازگشت و مکتب خود را در آن شهر بنا نهاد. اما ته‌آتتوس که از جوانی، به‌دلیل ذکاوت و رشادت، مورد تحسین و حمایت افلاطون بود، در کارزاری مجروح و کشته شد. افلاطون یکی از مهم‌ترین کتاب‌های گفتگوی خود را به‌احترام او نام نهاده است. ته‌آتتوس در توسعهٔ هندسهٔ فضایی و رده‌بندی احجام افلاطونی نقش اصلی را داشت و از مکالماتش با سقراط، طبق روایت افلاطون، برمی‌آید که در جوانی ناگویا بودنِ جذر عددهایی را که خود مجذور کامل نباشند، ثابت کرده است.

البته حضور در آکادمی افلاطون محدود به ریاضی‌دانان نبود. ظاهراً ارسطو پیش از آنکه به ایجاد مکتبی جداگانه اقدام کند، حدود ۲۰ سال را در این مرکز گذرانده است. به نظر می‌آید که پس از مرگ افلاطون و به‌ویژه به‌دنبال تأسیس کتابخانهٔ اسکندریه، ریاضیات در آکادمی افلاطون کم‌فروغ شده، ولی سایر فعالیت‌های علمی و فلسفی تا چند قرن در آن تداوم داشته است. از مکتوبات افلاطون و نیز آنچه به او نسبت داده شده است، برمی‌آید که ریاضیات به دو انگیزهٔ تعلیمی و فلسفی مورد توجه او بوده است. او شیوهٔ استدلال، نظم فکری و حقیقت‌جویی در ریاضیات را سرمشقی برای آماده‌سازیِ ذهن رهبران سیاسی می‌دانست و توصیه داشت که جوانانِ جویای نقش‌آفرینی در جامعه، مدت ده سال را (از بیست‌سالگی تا سی‌سالگی) به فراگیریِ ریاضیات بپردازند. به‌زعم افلاطون، ریاضیات شامل هندسه، حساب (به‌معنای امروزی: نظریهٔ اعداد)، موسیقی و اخترشناسی بود. در زمینهٔ فلسفهٔ ریاضیات، نام افلاطون تا به امروز با دیدگاه «افلاطون‌مشربی»[۷] پیوند خورده است که هرچند صورت‌های گوناگون دارد، ولی وجه مشترک بیشتر آنها را می‌توان این نظریه دانست که

۵. ددکیند در نوشتهٔ «پیوستگی و اعداد گویا» نظریهٔ برش‌ها را مطرح کرد. ترجمهٔ این متن به انگیسی، به‌عنوان بخش اول [۸] به چاپ رسیده است.

1. Eudoxus 2. Cnidus 3. Theaetetus 4. Richard Dedekind 6. exhaustion method 7. Platonism

اشیای مورد بحث در ریاضیات، وجودی مستقل از انسان و جهان مادی دارند و نقش ریاضی‌دان، کشف و آشکار ساختن هویّت و روابط میان این اشیاء است. افراطی‌ترین صورت این دیدگاه، اشیای ریاضی مانند عدد و خط را هم‌ردیف با مقولات مجرّد دیگری مانند فضیلت، درایت و زیبایی متعلق به دنیای ایده‌ها یا مُثُل می‌پندارد که جهانِ حقیقتِ محض را تشکیل می‌دهند و دنیای حادث، تنها سایه‌ای ناقص از آن است. در اینکه خودِ افلاطون تا چه حد به چنین دیدگاهی اعتقاد داشته است، بحث بسیار شده است.[۱] باید توجه داشت که آثار افلاطون طی نیم قرن نگاشته شده‌اند و احتمال دارد عقاید او در این فاصلهٔ زمانی، دچار تحوّل شده باشند. مثلاً در گفتگوهای فائدو[۲] و منو،[۳] ردپای این تفکر به‌صورت افراطی نمایان است؛[۴] در حالی که در جمهوری،[۵] جایگاه مفاهیم ریاضی تنزل یافته و در جایی بین ایده‌ها و جهان حادث قرار داده می‌شوند. ضمناً ارسطوی تجربه‌گرا که کلاً مخالف وجود جهان مجرّدات است و آشنایی طولانی با آکادمی داشته است، در آثار خود این دیدگاه میانی را به پیروان افلاطون نسبت می‌دهد. در هر صورت، افکار فلسفیِ افلاطون دربارهٔ ریاضیات خارج از موضوع ما است و آنچه برایمان مطرح خواهد بود، حمایتی تمام‌عیار است که افلاطون از پژوهش ریاضی به‌ویژه در هندسه و حساب که ریاضیات محض محسوب می‌شدند، روا داشته است. چنان‌که بعداً خواهیم دید، کتاب اصول اقلیدس با اینکه از نظر محتوا بهرهٔ قابل‌ملاحظه‌ای از پژوهش‌های آکادمی افلاطون می‌گیرد، به دیدگاه فلسفیِ احتمالاً غالب در آکادمی، بی‌اعتناست و در مجموع با دیدگاه ارسطویی قرابت بیشتری دارد.

۲ کتاب اصول اقلیدس

طبق شواهد مورّخان [۱۱، ۱۵]، طی قرن چهارم پیش از میلاد چند اثر علمی به‌نام «اصول»[۶] پدید آمده که هدف آنها جمع‌آوری اهمّ اکتشافات ریاضی زمانهٔ خود بوده است. از بین اینها فقط اثر اقلیدس به‌طور کامل بقاء یافته است و اکنون یکی از پرآوازه‌ترین کتاب‌های تاریخ محسوب می‌شود. در اینجا مختصراً به معرفی سیزده فصل این کتاب [۲] می‌پردازیم. چهار فصل نخست، مشتمل بر مطالب اولیه دربارهٔ هندسهٔ مسطحه است که احتمالاً قدمتشان عمدتاً به پیش از تأسیس آکادمی افلاطون می‌رسد. فصل پنج با نظریهٔ نسبت کمیّت‌های پیوسته (متصل) منسوب به اِئودُکسوس،

---

۱. یک مرجع کلاسیک برای مطالعه در فلسفهٔ ریاضیات افلاطون، کتاب ودبرگ [۲۱] است. اخیراً در کتاب لندری [۱۷] که ارجاع به نظرات جدیدتر هم دارد، ادعای افلاطون‌مشربیِ خود افلاطون در ریاضیات، به چالش کشیده شده است.

۴. در قطعه ۱۰۰ از فائدو، افلاطون از دهان سقراط می‌گوید: من وجود مطلق زیبایی، خوبی، کمیّت و همهٔ این چیزها را می‌پذیریم . . . .

2. Phaedo 3. Meno 5. Republic 6. Elements

آغاز می‌شود و دو فصل پنج و شش بیشتر به نسبت‌های هندسی اختصاص دارد. یک دستاورد فصل پنج این است که نسبت دو کمیّت از یک جنس، قابل‌مقایسه با نسبت کمیّت‌های هر جنس دیگر است که می‌توان آن را به‌اعتباری معرفیِ مفهوم کلی عدد حقیقی خالص (بدون واحد) تلقی کرد. این تعبیر که بعدها بیشتر مورد توجه قرار گرفته است، در کتاب اقلیدس به‌صراحت ابراز نشده و مورد استفادهٔ چشمگیر قرار نگرفته است. سه فصل هفت، هشت و نُه به نظریهٔ اعداد (= حساب) اختصاص دارد که قطعاً برخی از گزاره‌های اولیهٔ آن متعلق به دوران فیثاغورس است. فصل ده که طولانی‌ترین فصل کتاب است، گزاره‌های متعددی را دربارهٔ انواع نسبت‌های ناگویا، عمدتاً به روش هندسی، بررسی می‌کند.[۱] سه فصل آخر کتاب معطوف به هندسهٔ فضایی است؛ هرچند ضرورتاً تعدادی نتیجهٔ مهم در هندسهٔ مسطحه نیز در آنها ظاهر می‌شود. به نظر می‌آید که قبل از آغاز فعالیت آکادمی افلاطون، هندسهٔ فضایی رشد چندانی نداشته است. در کتاب جمهوری افلاطون، سقراط از این عدم‌توجه شاکی است[۲] و توسعهٔ هندسهٔ فضایی را از جمله برای درک بهتر سماوات توصیه می‌کند. فصل یازده به کلیّات و گزاره‌های اولیه درباب هندسهٔ فضایی اختصاص دارد. فصل دوازده با اثبات اینکه نسبت مساحت دایره (گوی دو بُعدی) به مجذور شعاع، مقداری ثابت است آغاز می‌شود و به یافتن دستورهای محاسبهٔ احجام گوناگون مانند منشور، هرم، مخروط و کره (گوی سه‌بُعدی) می‌انجامد. در این فصل روش افنای اِئودُکسوس نقشی مهم دارد. گزارهٔ نهایی فصل سیزده و کتاب اقلیدس، رده‌بندی چندوجهی‌های منتظم محدّب (اجسام افلاطونی) است که از موفقیت‌های چشمگیر ریاضیات یونانی محسوب می‌شود. گفته شده است که ته‌آتتوس در به‌انجام رساندن این نتیجه تأثیر زیادی داشته است.

پس از این مرور کوتاه، در ادامه به تشریح موضوعیِ محتوای کتاب اقلیدس خواهیم پرداخت.

۳ اصول موضوع

کمتر مبحثی در تاریخ علم به میزان پنج اصل‌موضوعی که اقلیدس در آغاز اولین فصل کتاب \اصول آورده است، مورد بحث و جنجال قرار گرفته است. فصل اول کتاب با تعدادی تعریف آغاز می‌شود، سپس تعدادی اصل‌موضوع و اصل متعارف عنوان می‌شوند و پس‌از آن، سلسله گزاره‌های هندسه همراه با برهان‌هایی که فرض می‌شود مبتنی بر اصول و تعریف‌ها هستند، ظاهر می‌گردند. اصول

۱. شرح مبسوطی از فصل ۱۰ در مرجع [۱۶] آمده است. ۲. مقصود، بحث سقراط در قطعهٔ ۵۲۸ کتاب هفتم جمهوری در [۱۲] است.

متعارف قرار است اصولی فرای هندسه باشند، ولی اصول موضوع معطوف به هندسهٔ مسطحه‌اند. نکتهٔ مهمی که باید در نظر داشت این است که برداشت اقلیدس از این اصطلاحات (تعریف، اصل، ...) با تعبیر امروزی ما از این کلمات یکی نیست. هندسه در عصر باستان (و در واقع تا اواسط قرن نوزدهم میلادی)، یک علم طبیعی دربارهٔ فضای حادث بود نه یک مبحث مجرّد دربارهٔ مفاهیم قراردادی که رفتار آنها به‌تمامی در چارچوب تعریف‌ها و اصول، مستتر انگاشته شود. به بیانی دیگر، هندسه همان فیزیک حالت سکون یا به آزادانه‌ترین تعبیر، شامل سینماتیک محض (فارغ از دینامیک و نیرو)، محسوب می‌شد. «تعریف» برای اقلیدس، توصیفی است که ذهن و تصوّر خواننده یا شنونده را متوجه موضوع طبیعی مورد بحث می‌کند، نه یک توصیف جامع و مانع در همهٔ موارد که بتوان کلیهٔ ویژگی‌های شیء مورد نظر را منطقاً از آن استخراج کرد. در میان اصول متعارف اقلیدس، یک اصل امروزه فاقد معنای عملی محسوب می‌شود («کل بزرگتر از جزء است») و دیگر اصول، یا بیان ویژگی‌های ابتدایی اعداد شمارشی هستند و یا بیانگر ویژگی‌های نسبتِ تساوی. امروزه اصول منطق (یا حتی اصول منطق مرتبهٔ اول) نقش اصول متعارف را ایفا می‌کنند. برای پرداختن به نقش اصول موضوع، مناسب است که صورت دقیق این پنج اصل را یادآوری کنیم:

(۱) برای هر دو نقطه می‌توان پاره‌خطی به‌انتهای آن دو نقطه رسم کرد.

(۲) هر پاره‌خط را می‌توان به‌اندازهٔ پاره‌خط داده‌شدهٔ دیگر، در راستای خود ادامه داد.

(۳) برای هر نقطه و هر پاره‌خط داده‌شده، می‌توان دایره‌ای به مرکز این نقطه و شعاعی به‌اندازهٔ آن پاره‌خط رسم کرد.

(۴) هر دو زاویهٔ قائمه برابرند.

(۵) هرگاه دو خط داده شده باشند و خط سومی آن دو را به‌گونه‌ای قطع کند که مجموع دو زاویهٔ داخلی در یک طرف تقاطع، کوچکتر از دو قائمه باشد، ادامهٔ دو خط اول در همان طرفِ تقاطع، یکدیگر را قطع خواهند کرد.

شاید نخستین نکته‌ای که در مورد بیان این اصول جلب‌نظر می‌کند این باشد که به‌استثنای اصل چهارم، سایر اصول، ساختی یا بیانگر ترسیم‌های مجاز در هندسهٔ مسطحه هستند. در واقع این چهار اصل دقیقاً مبنای کامل ترسیم با خطکش (غیرمدرج) و پرگارند. از این نظر، اقلیدس را می‌توان پیرو تمایل افلاطون دانست که برای خط راست و دایره جایگاه فلسفی خاصی قائل بود و ترسیم‌های وابسته به ابزاری بجز خطکش غیرمدرج و پرگار را (مثلاً برای تثلیث زاویه) دونِ منزلتِ رفیع هندسه می‌دانست. اگر نقش اصول اقلیدس را به‌عنوان مبنای ترسیم هندسی بپذیریم، این نکته نیز قابل‌ذکر

است که چون نتیجهٔ ترسیم باید مشخص و بی‌ابهام باشد، نوعی یکتایی در نتایج ترسیم مفروض و مستتر است. مثلاً در مورد اصل اول، می‌توان فرض کرد که یکتاییِ پاره‌خط رسم‌شده بین دو نقطه نیز مورد نظر بوده است. در این صورت، اِشکالی که بعداً بعضی به اصول اقلیدس وارد کرده‌اند به این مضمون که این اصول امکان محصور شدنِ یک ناحیه به دو پاره‌خط را نفی نمی‌کند، نابجاست، زیرا در آن صورت می‌توان بین دو نقطه پاره‌خط‌های متمایز رسم کرد. اصل چهارم از این نظر قابل‌توجه است که بیان می‌کند زاویه دارای یک واحد اندازه‌گیری مطلق و بی‌ابهام است؛ در حالی که برای طول، واحدی مطلق فرض نشده است. این تمایز که مبنای تشابه اَشکال و ترسیم الگوی اندازه‌های مختلف است، از ویژگی‌های هندسهٔ اقلیدسی محسوب می‌شود. مثلاً در هندسهٔ هذلولوی، طول نیز همانند زاویه دارای واحد مطلق است و تشابه اَشکال وجود ندارد مگر با انطباق کامل. برابریِ زاویه‌های قائمه این گونه قابل‌تعبیر است که با انتقال و دوران نیم‌خط‌های مشخص‌کنندهٔ زاویه‌های قائمه می‌توان آنها را بر یکدیگر منطبق کرد.

خوانندهٔ امروزیِ کتاب اقلیدس به‌سادگی درمی‌یابد که در بسیاری از برهان‌های کتاب اقلیدس، به‌طور ضمنی از فرض‌هایی فرای پنج اصل مذکور استفاده می‌شود و شهود حسّی ما از ویژگی‌های فضای فیزیکی، در این برهان‌ها نقش دارند. این ملاحظه مؤیّد نظری است که برای قُدما، هندسه کنکاشی در یافتن رموز فضای موجود بوده است نه کوششی برای ایجاد یک علم کاملاً انتزاعی. فیلسوفانی مانند افلاطون، مسحور قدرت استدلالی بودند که استخراج نتایج درست و قابل‌تحقیق را (مانند قضیهٔ فیثاغورس) از تعدادی محدود تعریف و فرض، ممکن می‌ساخت. یک هدف افلاطون این بود که همین قدرت عقلانی در دیگر امور انسانی به‌ویژه در اخلاقیات و سیاست، به‌کار گرفته شود. البته بعد از او ارسطو این شیوهٔ موفق ریاضیات، یعنی اتخاذ تعدادی تعریف و اصل و استنتاج نظریِ قضیه‌ها از آنها را الگوی مباحث علمی قرار داد.[۱]

در تأیید این نظر که هدفِ اصول موضوع اقلیدس، ایجاد یک نظام مجرّد و صوری به‌سبک امروزی نبوده است، توصیف هندسهٔ فضایی (سه‌بُعدی) در سه فصل آخر کتاب را مورد نظر قرار می‌دهیم. در اینجا هیچ اصل‌موضوع جدید یا فرضی اضافه که نشانگر عبور از صفحه به فضا باشد، مشاهده نمی‌کنیم، بلکه اقلیدس آشناییِ شهودی با فضای سه‌بُعدی را فرض کرده است و در مواقع لزوم از آن استفاده می‌کند. نمونهٔ بارز، گزارهٔ ۵ فصل یازده است. به‌زبان امروزی، این گزاره حکم می‌کند که بُعد فضا بیش از ۳ نیست. به‌طور دقیق، صورت گزاره این است: هرگاه سه خط در نقطه‌ای

۱. این گرایش در کتاب آنالوطیقای دوم (Analytica Posteriora) از [۱۸] مشهود است.

متقارب باشند و خط چهارمی در این نقطه بر هر سه عمود باشد، آنگاه سه خط اول در یک صفحه قرار دارند. برهان این گزاره در کتاب اقلیدس مبتنی بر این است که دو صفحهٔ متمایز نمی‌توانند در فقط یک نقطه یکدیگر را قطع کنند. ولی این حکم در فضاهای چهار بُعدی و بالاتر صادق نیست. بدین‌ترتیب، برهان کتاب اقلیدس را می‌توان یک دور باطل تلقّی کرد که در آن، به‌جای صراحت در اصل قراردادنِ سه‌بُعدی بودنِ فضا، از شهود حسّیِ معادل آن استفاده کرده است. البته همان‌طور که قبلاً اشاره شد، احتمال دارد که اصول موضوع فصل اول کتاب اقلیدس صرفاً به‌هدفِ توصیف عملیات مجازِ ترسیم با خط‌کش و پرگار بیان شده باشد که در این صورت، محدود بودنِ آنها به حالت دو بُعدی طبیعی است.

در اینجا باید اشاره کنیم که این ناهماهنگی در ارائهٔ اصول موضوع در بُعدهای ۲ و ۳، و نیز برخی ناهماهنگی‌های دیگر، بعضی مورّخان را به این نظر سوق داده است که ممکن است چند فصل آخر کتابی که به‌عنوان *اصول* اقلیدس می‌شناسیم، پس از او به کتاب افزوده شده باشد. یک مورد ناهماهنگی دیگر را خیّام در رسالهٔ *شرح ما أشكل من مصادرات كتاب اقلیدس*[۱] ذکر کرده است که مربوط به تعریف دایره و کره است. در آغاز فصل یک، دایره (در واقع، گوی دو بُعدی) ناحیه‌ای در صفحه محصور به خمی تعریف می‌شود که همهٔ نقاط آن از یک نقطهٔ ثابت به یک فاصله‌اند. لذا انتظار می‌رود که کره (گوی سه‌بُعدی) ناحیه‌ای در فضا محصور به سطحی تعریف شود که همهٔ نقاط آن از یک نقطهٔ تابت به یک فاصله باشند، ولی در ابتدای فصل یازده، کره ناحیه‌ای تعریف می‌شود که از دوران یک نیم‌دایره حول قطر آن حاصل می‌شود. خیّام از این ناهماهنگی ابراز شگفتی می‌کند، علاوه بر اینکه به‌دلیل فلسفی، از وارد کردن حرکت دورانی در یک متن صرفاً ریاضی ناخشنود است.

نکتهٔ پایانی قابل‌ذکر دربارهٔ اصول موضوع این است که برخی با سهل‌انگاری از کلمهٔ «وجود» در بیان اصول اقلیدس استفاده می‌کنند؛ مثلاً اصل اول را به این صورت بیان می‌کنند که بین هر دو نقطهٔ متمایز، یک پاره‌خط وجود دارد. چنین بیانی خلاف استنباط جاری در زمان اقلیدس به‌نظر می‌رسد. اساساً مبحث «وجود» مقوله‌ای در فلسفه و الهیات محسوب می‌شد که جایگاهی در ریاضیات نداشت. ریاضیات یا از امکان و روش ساختن به شیوه‌های مُجاز صحبت می‌کرد یا به بیان دقیقِ آنچه وجود داشت، می‌پرداخت. فعالیت اول را در ساخت‌های هندسی و حسابی متعدد در کتاب اقلیدس شاهد هستیم. تلقّی ریاضیات به‌عنوان یک علم طبیعی، گویای نقشی دیگر است.

۱. طبق [۲۰]، تنها دو نسخه از این رسالهٔ مهم خیام در دسترس است: یکی در دانشگاه لایدن هلند و دیگری در کتابخانهٔ ملی فرانسه در پاریس. ارجاعات ما به این رساله بر اساس ترجمهٔ انگلیسیِ آن در [۲۰] است. موضوع ناهماهنگی در تعریف دایره و کره، در مقدمهٔ رساله آمده است.

۴ عدد و نسبت

کلمهٔ «$\alpha\rho\iota\theta\mu o\zeta$» که به «عدد» ترجمه می‌شود و ریشهٔ لغت انگلیسی «arithmetic» است، در یونان باستان به اعداد طبیعی از ۲ به بالا اطلاق می‌شد و مقصود، حاصل تجمع تعدادی (بیش از یک) واحد بود. به‌طور کلی، اصطلاح کمیّت گسسته برای کمیّت‌هایی به‌کار می‌رفت که دارای واحدهای طبیعی جدا از هم باشند. به‌عکس، کمیّت‌هایی مانند طول پاره‌خط، مساحت، حجم، وزن و گذر زمان، نمونه‌های کمیّت پیوسته محسوب می‌شدند، زیرا دست‌کم در قلمرو محسوس فاقد واحد طبیعی بودند. برای مقاصد عملی مربوط به اندازه‌گیری و مقایسهٔ این کمیّت‌ها، لازم بود که واحدی قراردادی برای آنها اتخاذ شود. به این ترتیب، به‌جای مقایسهٔ عددی برای سنجش نسبیِ دو مقدار از یک کمیّت، از مفهوم «نسبت» برای مقایسهٔ دو مقدار استفاده می‌کردند که به انتخاب واحد قراردادی بستگی نداشت. با هدفِ رفع تمایز میان گسسته و پیوسته، دو پیشنهاد زیر قابل‌طرح بود:

(۱) (نظریهٔ قوی اتمی) هر نوع کمیّت پیوستهٔ متجانس، از تعداد بسیار زیادی واحد یکسان تشکیل شده است که ممکن است به‌دلیل کوچک بودن، برای انسان محسوس نباشند؛

(۲) (نظریهٔ ضعیف اتمی) برای هر دو مقدار داده‌شده از یک کمیّت متجانس، مقداری (کوچکتر) از همان کمیّت هست که می‌توان هر یک از دو مقدار داده‌شده را حاصل تجمع تعدادی (متناهی) از آن مقدار کوچک فرض کرد.

روشن است که نظریهٔ قوی اتمی، نظریهٔ ضعیف اتمی را نتیجه می‌دهد. توجه کنید که به زبان امروزی، نظریهٔ ضعیف اتمی معادل این فرض است که نسبت هر دو کمیّت متجانس، گویا باشد، زیرا اگر مقدار کوچکترِ شمارندهٔ هر دو را u بنامیم، طبق نظریهٔ ضعیف، دو مقدار داده‌شده باید برابر با mu و nu باشند که در اینجا m و n عددهای طبیعی هستند. بنابراین نسبت دو مقدار برابر با $(m:n)$ می‌شود که گویا است. با کشف نسبت‌های ناگویا، حتی نظریهٔ ضعیف اتمی به‌طور قاطع مردود شناخته شد و بحران فکری عظیمی در محافل علمی دوران باستان ایجاد شد به‌گونه‌ای که این موضوع در نوشته‌های افلاطون و ارسطو جایگاهی بسیار برجسته را اشغال می‌کند. بی‌شک این امر در مخالفت ارسطو با نظریهٔ (فیزیکیِ) اتمی و تفکیک قاطعی که او میان کمیّت‌های پیوسته و گسسته قائل بود، اثرگذار بوده است.[۱]

در مورد اینکه وجود نسبت‌های ناگویا (برای طول پاره‌خط‌ها) نخستین‌بار چگونه کشف شد،

۱. اشاره به تمایز گسسته و پیوسته در آثار ارسطو فراوان است. دو نمونهٔ بارز در [۱۸] عبارت‌اند از قطعهٔ ۶ از فصل ۵ کتاب مقولات (Categoriae) و قطعهٔ ۷ از فصل اول کتاب آنالوطیقای دوم (Analytica Posteriora).

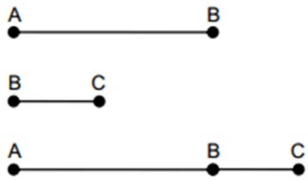
دست‌کم دو نظر مختلف وجود دارد. یک نظرِ رایج، اثبات ناگویا بودنِ نسبت طول قطر مربع به طول ضلع است (نظر دیگر را در بخش مربوط به الگوریتم اقلیدسی خواهیم دید). در کتاب گفتگوی ته‌آتتوس از افلاطون، ته‌آتتوسِ جوان به سقراط می‌گوید که استاد ریاضی‌شان تئودوروس قبلاً موفق شده بود ثابت کند که جذر هر عدد فرد تا ۱۷ که خود مجذور کامل نباشد، نسبتی ناگویا است، ولی او و دوستش بر آن شدند که موضوع را برای همهٔ اعداد بررسی کنند. از این جمله معمولاً دو نتیجه‌گیری می‌شود. یکی اینکه ناگویا بودنِ جذر عدد ۲ می‌بایست در آن زمان مطلبی جاافتاده بوده باشد؛ دیگر اینکه ته‌آتتوس (و دوستش) این حکم کلی را ثابت کرده‌اند که جذر هر عدد طبیعی، ناگویا است مگر جذر آنهایی که خود مجذور کامل باشند. به‌عنوان شاهدی برای مطلب اخیر، معمولاً به گزارهٔ ۹ از فصل ده کتاب اقلیدس اشاره می‌شود. در بخش بعدی که دربارهٔ نظریهٔ اعداد است، خواهیم دید که این گزاره همراه با گزاره‌های فصل هفت یا فصل هشت، حکم مورد نظر را نتیجه می‌دهد.

با پذیرش قهریِ نسبت‌های ناگویا، مثلاً به‌عنوان نسبت طول دو پاره‌خط، موضوع مقایسهٔ چنین نسبت‌هایی، هم با یکدیگر و هم با نسبت‌های گویا، مطرح می‌شود. توجه کنید که هیچ روش عمومی برای نمایش آنچه ما امروزه عدد حقیقی می‌نامیم، وجود نداشت و اساساً نسبت ناگویا پدیده‌ای غیرمنتظره و نامتجانس محسوب می‌شد که نوعی بازنگری نسبت به نظم ساده و زیبای اعداد طبیعی و نسبت‌های گویا که پیوندی آشکار با اعداد طبیعی داشتند، می‌طلبید. در آغاز فصل پنج کتاب اقلیدس، ضابطه‌ای که ابداع آن معمولاً به اِئودُکسوس نسبت داده می‌شود، به‌عنوان تعریف کلی ترتیب نسبت‌ها مطرح شده است. فرض کنیم A و B کمیّت‌هایی از یک جنس باشند. نسبت A به B را با نماد $(A:B)$ نمایش می‌دهیم. ضابطهٔ کتاب اقلیدس به این صورت است: نسبت $(A:B)$ برابر با نسبت $(C:D)$ است در صورتی که برای هر دو عدد طبیعی m و n تعداد دفعاتی که mB در nA می‌گنجد، برابر با تعداد دفعاتی باشد که mD در nC می‌گنجد. اگر m و n به‌گونه‌ای یافت شوند که تعداد دفعاتی که mB در nA می‌گنجد، کوچکتر از تعداد دفعاتی باشد که mD در nC می‌گنجد، آنگاه $(A:B)$ از $(C:D)$ کوچکتر است.

حال اگر نسبت (عدد حقیقی) $(A:B)$ را با ξ و نسبت (عدد حقیقی) $(C:D)$ را با η نمایش دهیم، شرطی لازم و کافی برای $\xi < \eta$ این خواهد بود که نسبتی گویا مانند m/n وجود داشته باشد که $\xi < m/n < \eta$. از اینجا با استفاده از قاعدهٔ طرفین–وسطین در نامساوی‌های

$$(A:B) < (m:n) < (C:D),$$

ارتباط احتمالی روش ددکیند برای تعریف اعداد حقیقی و تعریف فصل پنج کتاب اقلیدس آشکار می‌شود. توجه کنید که اگر دو نسبت برابر نباشند، این امر را طبق ضابطهٔ فوق، می‌توان در تعدادی متناهی گام تحقیق کرد، ولی تحقیق برابریِ دو نسبت، تمام‌شدنی نیست. عیناً همین وضعیت را در نمایش اعشاریِ اعداد حقیقی ملاحظه می‌کنیم که نابرابری با اولین مشاهدهٔ نابرابریِ ارقام متناظر در زمان متناهی محقق می‌شود، ولی تحقیق برابری در زمان متناهی ممکن نیست. یک نکتهٔ مهم دیگر که از تعریف بالا نتیجه می‌شود این است که همهٔ نسبت‌ها (مستقل از جنس کمیّت‌های مربوط) قابل‌مقایسه هستند و این در واقع کلید تعریف عدد حقیقی (عدد مطلق بدون واحد فیزیکی) است. به این ترتیب، برای بررسی نسبت‌ها کافی است مثلاً نسبت طول پاره‌خط‌ها مطالعه شود. در سراسر کتاب اقلیدس، وقتی صحبت از نسبت‌ها است، شکل‌های مربوط به پاره‌خط نمایش داده می‌شوند؛ هرچند که این موضوع هیچ‌جا به‌صراحت بیان نشده است. یک کاربرد مهم دیگر این نکته مفهوم جمع نسبت‌ها است. در مورد کمیّت‌های گسسته مانند اعداد طبیعی، تجمیع واحدهای سازندهٔ دو کمیّت، مفهوم مجموع را تعریف می‌کند. برای پاره‌خط‌ها، اصل دوم اقلیدس دقیقاً بیان عمل جمع است: مجموع دو پاره‌خط که از اتصال و قراردادن آنها در یک امتداد حاصل می‌شود، از همان جنس پاره‌خط است و به انتخاب واحد بستگی ندارد (شکل ۱). از این نتیجه می‌شود که مجموع دو نسبت، نسبتی خوش‌تعریف است، ولی خواهیم دید که این امر در مورد عمل ضرب به انتخاب واحد وابسته می‌شود. به زبان ریاضیات امروزی، حاصل عمل جمع که عملی خطی است، به واحد بستگی ندارد، ولی حاصل عمل ضرب که عملی دوخطی است، به واحد وابسته است.



شکل ۱. رسم مجموع دو نسبت AB و BC

۵ نظریهٔ اعداد

سه فصل هفت، هشت و نُه کتاب اقلیدس به علم حساب یا آنچه امروزه نظریهٔ اعداد خوانده می‌شود، اختصاص دارد. بعضی از معروف‌ترین قضیه‌های نظریهٔ مقدماتی اعداد در این سه فصل ظاهر می‌شوند، ولی تعداد قابل‌ملاحظه‌ای گزاره و نتیجه‌گیری در این سه فصل هست که برای خوانندهٔ

امروزی زائد و بی‌اهمیت جلوه می‌کند. علت این امر احتمالاً در دست نبودنِ اعداد منفی و جبر محاسبه با کسرهای گویا در زمان اقلیدس است. فصل هفت با تعریف‌های اولیه مانند اعداد زوج و فرد، اعداد اول و مرکب، ضرب اعداد طبیعی به‌معنای تکرار عمل جمع، و پاره‌ای مفاهیم دیگر آغاز می‌شود. اولین گزارهٔ مهم و یکی از شاخص‌ترین گزاره‌ها، گزارهٔ ۲ در این فصل است که امروزه آن را به‌نام «الگوریتم اقلیدسی» برای یافتن بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد صحیح می‌شناسیم. سپس بحث با تعمیم الگوریتم به بیش از دو عدد و تعدادی گزارهٔ ابتدایی در این مقوله و نسبت‌های اعداد طبیعی، دنبال می‌شود. گزارهٔ مهم بعدی، گزارهٔ ۳۰ است که امروزه به «لم اقلیدس» معروف است و حربهٔ اصلی در اثبات «قضیهٔ بنیادی حساب» دربارهٔ تجزیهٔ یکتای اعداد طبیعی به عوامل اول محسوب می‌شود. بنابر لم اقلیدس، اگر یک عددِ اول حاصل‌ضرب دو عدد را بشمارد، این عددِ اول باید دست‌کم یکی از آن دو عدد را بشمارد. امروز برای اثبات، معمولاً عدد واحد را به‌صورت ترکیبی خطی با ضرایب صحیح می‌نویسیم که لزوماً یکی از ضرایب منفی است، ولی اقلیدس که اعداد صحیح منفی را در اختیار نداشت، موضوع را با استفاده از مقدماتی که قبلاً تدارک دیده بود، به اثبات رساند. در ادامه هیچ‌گاه قضیهٔ بنیادی حساب صریحاً عنوان نمی‌شود، ولی از متن پیدا است که این حکم عملاً در دست بوده است. گویا کمال‌الدین فارسی (۱۲۶۰–۱۳۲۰ میلادی) نخستین بیان کامل و صریح این قضیه را ارائه داده است.[۱] فصل هفت با دستورالعمل یافتن کوچک‌ترین مضرب مشترک به پایان می‌رسد.

یک حکم جالب‌توجه که می‌توان به‌سادگی از قضیهٔ بنیادی حساب (یا لم اقلیدس) نتیجه گرفت این است که اگر مجذور یک عدد بر مجذور عددی دیگر بخش‌پذیر باشد، خودِ آن عدد هم بر این عددِ دیگر بخش‌پذیر است. این، مضمون گزارهٔ ۱۴ از فصل هشت کتاب اقلیدس است که او به روشی دیگر ثابت می‌کند. با این گزاره می‌توانیم اثبات ناگویا بودنِ جذر اعداد طبیعی را که خود مجذور کامل نباشند، به روش احتمالیِ ته‌آتتوس کامل کنیم. بنابر گزارهٔ ۹ از فصل ده کتاب، اگر جذر عدد N گویا باشد، آنگاه خودِ آن عدد باید برابر با نسبت دو مجذور کامل باشد. پس صورت این نسبت باید بر مخرج آن بخش‌پذیر باشد. از این‌رو بنابر گزارهٔ ۱۴ از فصل هشت، جذر N نیز عددی صحیح خواهد بود. به‌جای گزارهٔ ۱۴، می‌توان مستقیماً از لم اقلیدس برای تکمیل برهان استفاده کرد. یک شگفتی کتاب اقلیدس این است که نتیجه‌گیریِ فوق، پس از گزارهٔ ۹ فصل ده کتاب یا جایی دیگر پس از آن، ظاهر نمی‌شود!

---

۱. صورت کامل قضیهٔ بنیادی حساب را کمال‌الدین فارسی (فاریزی، پاریزی)، ریاضی‌دان و فیزیک‌دان، در کتاب تذکرةالاحباب فی بیان‌التّحاب آورده است.

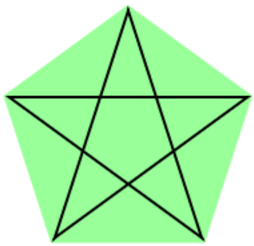
میراث معروف دیگرِ نظریهٔ اعداد اقلیدس، قضیه‌ای است که معمولاً به نامتناهی بودنِ مجموعهٔ اعداد اول تعبیر می‌شود. صورت دقیق گزارهٔ ۲۰ از فصل نُه کتاب اقلیدس این است که هر چندتا (متناهی) عدد اول داده شده باشد، عدد اول دیگری می‌توان یافت که در این مجموعه نباشد. اقلیدس به روش آشنا، با ضرب کردن اعداد اول داده‌شده و افزودن یک واحد به حاصل‌ضرب، نشان می‌دهد مقسوم‌علیه اولِ عدد حاصل، نمی‌تواند یکی از اعضای مجموعهٔ متناهی مفروض باشد. ذکر چند نکته در اینجا لازم است. یکی اینکه روش اقلیدس ساختی است نه اثبات وجودیِ محض. از آنجا که حاصل‌ضرب به‌علاوهٔ واحد، یک کران بالایی برای عدد اول مورد جستجو است، این جستجو در تعدادی متناهی گام که وابسته به داده‌ها است، پایان می‌پذیرد. نکتهٔ دیگر اینکه تفکّر غالب (ارسطویی) جایگاهی برای مجموعهٔ نامتناهی (تکمیل‌شده یا بالفعل) قائل نبود و اقلیدس نیز قضیه را به این صورت بیان نمی‌کند که مجموعهٔ اعداد اول، نامتناهی است. بالأخره نکته‌ای کلی دربارهٔ شیوه برهان گفتنی است. در دوران مورد بحث و حتی دورهٔ بعدیِ تمدن اسلامی، روش اثبات به استقرای ریاضی هنوز معمول نشده بود. به‌علاوه حتی عبارتی مانند «فرض کنیم اعداد اول $p_۱$، $p_۲$، . . .، p_n داده شده باشند» که در آن، n مشخص نباشد، به‌کار گرفته نمی‌شد. در برهان قضیهٔ مورد بحث، اقلیدس فرض می‌کند که سه‌تا عدد اول داده شده باشند، سپس عدد اول چهارمی متمایز از آنها پیدا کرده و برهان را تمام‌شده اعلام می‌کند. این روش تا قبل از معرفی رسمیِ استقرای ریاضی توسط پاسکال در قرن هفدهم، رایج بود. اگر ریاضی‌دان می‌خواست حکمی را برای n دلخواه ثابت کند، آن را برای عدد خاص ظاهراً خنثایی ثابت و پیروی از همین استدلال را برای هر عدد دیگر، به خوانندهٔ فهیم واگذار می‌کرد.

آخرین مطلب فصل نُه، گزارهٔ ۳۶ مربوط به اعداد تام است. در فصل هفت، اقلیدس عددی را تام تعریف می‌کند که برابر با مجموع مقسوم‌علیه‌های کوچکتر از خودش باشد. گزارهٔ ۳۶ بیان این مطلب است که اگر $N = ۱ + ۲ + \cdots + ۲^n$ یک عدد اول باشد، آنگاه $۲^n \times N$ یک عدد تام است. در قرن هیجدهم میلادی، اویلر ثابت کرد که هر عدد تام زوج باید به این شکل باشد. هنوز بود یا نبودِ عدد تام فرد معلوم نشده است.

۶ الگوریتم اقلیدسی

دستورالعمل محاسباتی که امروز به \الگوریتم \اقلیدسی معروف است، از قدیمی‌ترین الگوریتم‌هاست و قطعاً سابقه‌اش به پیش‌از اقلیدس بازمی‌گردد؛ در عین حال، هنوز از کاراترین و الهام‌بخش‌ترین

روش‌های محاسباتی است. این الگوریتم دو بار در کتاب اقلیدس ظاهر می‌شود: یک‌بار به‌عنوان گزارهٔ ۲ در فصل هفت که شرح آن در بخش پیشین رفت و بار دیگر، در قالب گزارهٔ ۲ در فصل ده. این بار، به‌طور کلی بررسی نسبت دو کمیّت مانند دو طول که ممکن است کمیّت‌های پیوسته نیز باشند، مطرح می‌شود. این برخورد دوگانه یادآور توصیهٔ اکید و مکرر ارسطو است که کمیّت‌های گسسته و پیوسته از دو جنس و رفتار کاملاً متمایز هستند و باید از آمیختن مباحث آن دو اجتناب کرد؛ توصیه‌ای که در سراسر کتاب اقلیدس وسواس‌گونه رعایت شده است. البته به‌کار گرفتنِ الگوریتم اقلیدسی در مورد کمیّت‌های پیوسته ممکن است منجر به پدیده‌ای شود که برای اعداد طبیعی رخ نمی‌دهد. در مورد اعداد طبیعی، الگوریتم در تعدادی متناهی گام با یافتن بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک که می‌توان آن را بزرگترین واحد برای شمردن هر دو عدد داده‌شده تلقّی کرد، به پایان می‌رسد در حالی که اگر نسبت دو کمیّت پیوسته گویا نباشد، اجرای الگوریتم هرگز به پایان نمی‌رسد؛ یعنی واحدی مشترک برای شمردن دو کمیّت یافت نمی‌شود. به روایتی،[1] وجود نسبت‌های ناگویا نخستین‌بار از این طریق کشف شد. عدد $(\sqrt{۵}+۱)۲^{-۱}$ مشهور به نسبت طلایی، در مقولات متنوعی ظاهر می‌شود از جمله نسبت طول یالِ ستارهٔ پنج‌پر (پنتاگرام) به طول ضلع پنج‌ضلعی منتظم محیطی آن (شکل ۲). ستارهٔ پنج‌پر

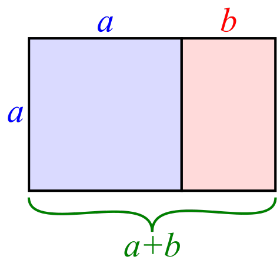


شکل ۲. ستارهٔ پنج‌پر و پنج‌ضلعی منتظم محیطیِ آن

نماد فیثاغورسیان بوده است و بنابر این روایت، ناگویا بودنِ این نسبت توسط هیپاسوس نامی از شاگردان مکتب فیثاغورس، کشف گردید و منجر به غرق کردن وی در دریا شد. روشی ساده‌تر برای اثبات پایان‌ناپذیریِ الگوریتم اقلیدسی برای نسبت طلایی، در نظر گرفتنِ «مستطیل طلایی» است: مستطیلی که اگر از آن، مربعی به طول ضلع عرضِ مستطیل جدا کنیم، مستطیل باقیمانده متشابه با مستطیل اولیه باشد (شکل ۳). نسبت طول به عرضِ مستطیل طلایی، همان نسبت طلایی است. از نسبت طلایی در کتاب اقلیدس به «نسبت فرین و میانگین»[2] یاد می‌شود و در طول کتاب چند

۱. به مقالهٔ K. Mainzer در فصل ۲ از مرجع [۱۰] نگاه کنید.

2. extreme and mean ratio



شکل ۳. در مستطیل طلایی، مستطیل کوچکتر با مستطیل اولیه متشابه است: $\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$.

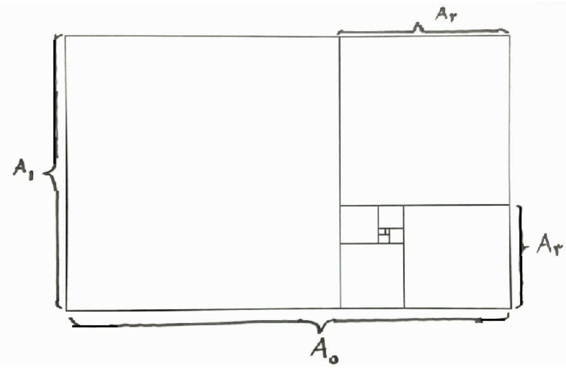
روش ترسیم با خطکش و پرگار برای ساختن آن آورده شده است.

یک دستاورد مهم الگوریتم اقلیدسی نمایش نسبت‌ها (اعداد حقیقی مثبت) به‌صورت کسر مسلسل است. نسبت‌های گویا به‌صورت کسر متناهی و نسبت‌های ناگویا به‌شکل کسر نامتناهی ظاهر می‌شوند. به‌ویژه در شکل ۴ می‌بینیم که چگونه اجرای الگوریتم اقلیدسی برای نسبت طول به عرضِ مستطیل طلایی به پایان نمی‌رسد:

$$
\begin{gathered}
A_1 < A_0 \Longleftrightarrow \frac{A_1}{A_0} < 1 \\
A_0 = n_0 A_1 + A_2, \quad A_2 < A_1 \Longleftrightarrow \frac{A_0}{A_1} = n_0 + \frac{A_2}{A_1}, \quad \frac{A_2}{A_1} < 1 \\
A_1 = n_1 A_2 + A_3, \quad A_3 < A_2 \Longleftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = n_1 + \frac{A_3}{A_2}, \quad \frac{A_3}{A_2} < 1 \\
A_2 = n_1 A_3 + A_4, \quad A_4 < A_3 \Longleftrightarrow \frac{A_2}{A_3} = n_2 + \frac{A_4}{A_3}, \quad \frac{A_4}{A_3} < 1 \\
\vdots \\
\frac{A_0}{A_1} = n_0 + \cfrac{1}{n_1 + \cfrac{1}{n_2 + \cfrac{1}{n_3 + \cdots}}}
\end{gathered}
$$

در میان کسرهای مسلسل نامتناهی، آنهایی که مآلاً تناوبی هستند، دقیقاً نسبت‌هایی هستند که ریشه‌های ناگویای معادلات درجه‌دو با ضرایب عدد صحیح‌اند.[۱] این گونه نسبت‌ها در فصل ده کتاب اقلیدس به‌طور مبسوط مطالعه شده‌اند و قابلیت ترسیم با خطکش و پرگار دارند. در خصوص نمایش کسر مسلسل، حکیم عمرخیام در بخش دوم رسالهٔ شرح ما أشکل من مصادرات کتاب اقلیدس،

۱. به کتاب‌های نظریهٔ اعداد یا [۱۴] نگاه کنید.



شکل ۴. در مورد مستطیل طلایی، الگوریتم اقلیدسی بی‌پایان است.

نقدی جالب‌توجه نسبت به روش مقایسهٔ نسبت‌ها در فصل پنج کتاب اقلیدس ابراز می‌کند.[۱] خیام ضمن تأیید درست بودنِ نظریِ روش کتاب اقلیدس، این نقد را وارد می‌کند که آن روش، اطلاعی دربارهٔ اندازهٔ تک‌تکِ نسبت‌ها به‌دست نمی‌دهد. پیشنهاد برتر او این است که هر دو نسبت به‌صورت کسر مسلسل نمایش داده شوند و در اولین مرحله‌ای که دو نمایش متفاوت می‌شود، بسته به اینکه این مرحله زوج یا فرد باشد، با مقایسهٔ دو مخرج متفاوت، نسبت بزرگتر معرفی شود. اگر روش اِئودُکسوس را پیشتاز تعریف ددکیند از اعداد حقیقی تصوّر کنیم، شایسته است روش خیام را نیز پیشتاز روش کانتور و وایرشتراس در مورد تعریف اعداد حقیقی به‌عنوان حد دنباله‌های اعداد گویا بدانیم.

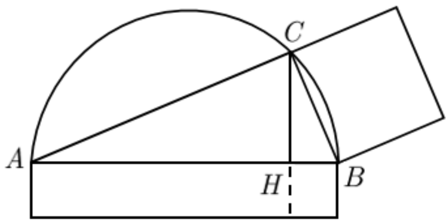
۷ مساحت و ضرب نسبت‌ها

در حالت یک‌بُعدی، خطوط راست تنها شکل‌های مستوی (ناخمیده) هستند، نسبت طول پاره‌خط‌ها مفهومی شناخته‌شده فرض می‌شود و مجموع دو طول نیز مستقل از انتخاب واحد اندازه‌گیری توسط اصل دوم اقلیدس معرفی می‌شود. همین برنامه در فصل دوم کتاب اقلیدس برای مساحت شکل‌های مستویِ دو بُعدی که محصور به مجموعه‌ای از پاره‌خط‌های متّصل باشند (چندضلعی‌ها) پیاده‌سازی می‌شود. در آغاز، ساده‌ترین شکل که مربع است، در نظر گرفته می‌شود و مساحت آن، یعنی محتوای دو بُعدیِ محصور به چهار ضلع مربع، مفهومی شناخته‌شده فرض می‌شود. مجموع دو مربع از قضیهٔ فیثاغورس که در پایان فصل اول می‌آید، قابل‌محاسبه است. دو مربع را از بیرون در یک رأس به هم می‌چسبانیم به‌گونه‌ای که یک زاویهٔ قائمه بین دو ضلع منتهی به رأس ایجاد شود، سپس دو انتهای

۱. بخش دوم از رسالهٔ خیام که ترجمهٔ آن در [۲۰] آمده است، حاوی این موضوع است.

دیگر این دو ضلع را به هم وصل می‌کنیم که مثلثی قائم‌الزاویه پدید آید. مربع روی این وتر، مجموع دو مربع اولیه است. به این ترتیب، قضیهٔ فیثاغورس نقش اصل دوم اقلیدس را برای مربع‌ها ایفاء می‌کند.[۱]

سایر چندضلعی‌ها در چند مرحله به حالت مربع تحویل می‌شوند و مفهوم مجموع مساحت چندضلعی‌ها نیز به همین روش حاصل می‌شود. نخست فرض کنید مستطیلی به طول a و عرض b داده شده باشد. پاره‌خط AB را به طول a در نظر می‌گیریم و نقطهٔ H را بین A و B روی AB طوری انتخاب می‌کنیم که طول HB برابر با b باشد. نیم‌دایره‌ای به قطر AB رسم می‌کنیم و از H عمودی بر قطر می‌سازیم تا نیم‌دایره را در نقطهٔ C قطع کند (شکل ۵). مثلث ABC در رأس C

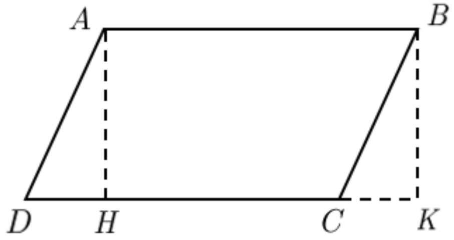


شکل ۵. ساختنِ مربعی هم‌مساحت با مستطیل داده‌شده

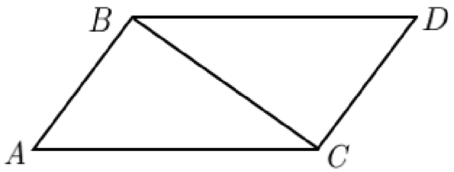
قائمه است و با نوشتنِ نسبت‌های اضلاع دو مثلث متشابه BHC و BCA، می‌بینیم که مساحت مربع به ضلع BC برابر با مساحت مستطیل به طول و عرض a و b است (این در واقع بخشی از اثبات سنّتی قضیهٔ فیثاغورس است). به این روش، برای هر مستطیل، مربعی معادل از نظر مساحت ساخته می‌شود. در گام بعدی، متوازی‌الاضلاع $ABCD$ را در نظر می‌گیریم. با رسم ارتفاع‌های AH و BK (شکل ۶) و جایگزینیِ مثلث BKC به‌جای مثلث AHD، مستطیل $ABKH$ هم‌مساحت با متوازی‌الاضلاع داده‌شده حاصل می‌شود. سپس برای مثلث داده‌شدهٔ ABC، با افزودن مثلث برابرِ DCB (شکل ۷)، متوازی‌الاضلاع $ABDC$ به‌دست می‌آید و مساحت مثلث، نصف مساحت متوازی‌الاضلاع است. بالاخره هر چندضلعی را می‌توانیم به مثلث‌هایی تجزیه کنیم که فقط در اضلاع و رئوس اشتراک دارند (شکل ۸) و مساحت چندضلعی را برابر مجموع مساحت‌های مثلث‌ها می‌گیریم. در نهایت، نتیجه می‌شود که هر چندضلعی از نظر مساحت معادل با یک مربع است و این محتوای آخرین گزارهٔ فصل دو در کتاب اقلیدس است.

در بالا عمل جمع را برای دو مفهوم هندسی طول و مساحت بررسی کردیم. همان‌طور که قبلاً

۱. به این ترتیب، ترسیم مجموع دو مربع داده‌شده با خط‌کش و پرگار ممکن می‌شود. ترسیم مجموع دو مکعب با خط‌کش و پرگار که در ساده‌ترین حالت، همان تضعیف مکعب است، از مسائل کلاسیک ریاضیات باستان محسوب می‌شود.

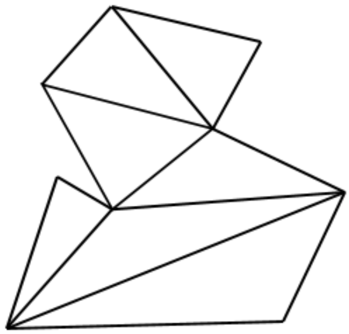


شکل ۶. ساختنِ مستطیلی هم‌مساحت با متوازی‌الاضلاع داده‌شده

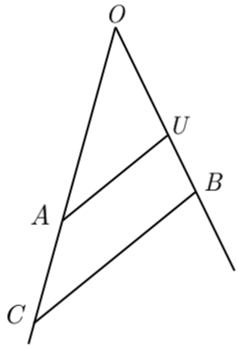


شکل ۷. مساحت مثلث نصف مساحت متوازی‌الاضلاع

دیدیم، هر نسبت را می‌توان با نسبت طول دو پاره‌خط برابر گرفت و بنابراین مفهوم جمع برای نسبت‌ها معنادار می‌شود. برای مجموع دو نسبت، تعبیری به‌صورت پیوند دو پاره‌خط به شیوهٔ اصل دوم اقلیدس وجود دارد. اما ضربْ داستانی کاملاً متفاوت دارد. برای اعداد طبیعی، حاصل‌ضرب دو عدد، برحسب عمل جمع بیان می‌شود: حاصل‌ضرب m و n همان mبار انباشتنِ n واحد است. برای نسبت‌های گویا می‌توان با تقسیم واحد، تدبیری مشابه اتخاذ کرد، ولی این رویکرد برای نسبت‌های ناگویا معنادار نیست. به این دلیل، موضوع ضرب نسبت‌ها به شیوه‌ای که حاصل عمل نیز یک نسبت باشد، تقریباً در کتاب اقلیدس ظاهر نمی‌شود و او عمدتاً به موارد هندسیِ واحددار بسنده می‌کند: حاصل‌ضرب دو طول که از جنس مساحت است و حاصل‌ضرب طول و سطح که به حجم تعبیر می‌شود. احتمال دارد وابستگیِ عمل ضرب به اتخاذ واحدی قراردادی که در تعریف حاصل‌ضرب بر مبنای تشابه، ضروری است (شکل ۹) هرگونه کوشش برای تعریف حاصل‌ضرب را در انظار قدما بی‌معنا کرده باشد. مثلاً توجه کنید که عمل مجذور کردن برای اعداد صحیح و اعداد گویا عملی خوش‌تعریف (خالی از ابهام) فرض می‌شود، در حالی که اگر ضربِ یک نسبت در خودش را طبق نسخهٔ شکل ۹ در نظر بگیریم، مجذور به انتخاب واحد وابسته می‌شود. به‌خصوص اگر واحدی کوچکتر از نسبت داده‌شده اتخاذ شود، مجذورِ نسبت از خود آن بزرگتر است، ولی اگر واحد را بزرگتر از نسبت داده‌شده بگیریم، مجذور از خود نسبت کوچکتر خواهد بود! البته ایراد در



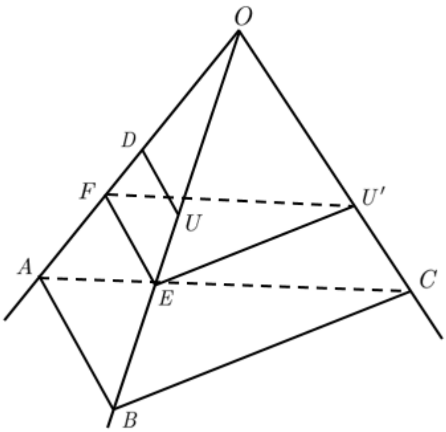
شکل ۸. تجزیهٔ چندضلعی به مثلث‌ها: مساحت چندضلعی = حاصل‌جمع مساحت مثلث‌ها



شکل ۹. $\overline{OU} = 1$، $\overline{OA} = a$، $\overline{OB} = b$، $\overline{OC} = ab$

این است که قدما هیچ‌گاه موفق نشدند به شیوه‌ای معنادار همهٔ نسبت‌ها را اعم از گویا و ناگویا در درون یک نظام ریاضی بگنجانند به‌طوری که همان واحد فرضیِ اعداد صحیح، نقش واحد ثابت را برای همهٔ نسبت‌ها بازی کند. تنها موردی که اقلیدس از حاصل‌ضرب دو نسبت به‌عنوان نسبت استفاده می‌کند، استفاده (بدون اثبات) از اتحاد $(A : B)(B : C) = (A : C)$ در فصل شش است. به‌زعم خیام در بخش سوم رسالهٔ مورد اشاره، این استفاده هم در فصل شش ضروری نیست، ولی برهان آن به‌علت کاربردهای فراوان دیگر، مثلاً در کارهای آپولونیوس در مخروطات و محاسبات نجومی بطلمیوس، ضروری است. خیام خود برهانی از این اتحاد ارائه می‌کند که به‌سبب ابتکاری که در آن به‌کار رفته، قابل‌توجه است. ابتکار او این است که در ابتدا واحدی را فرض می‌کند، ولی در نهایت این واحد ناپدید می‌گردد و معلوم می‌شود که انتخاب واحد، اثری بر نتیجه نداشته است. خیام اندیشیدن در این موضوع را که به واحد کمیّت پیوسته چه معنایی می‌توان نسبت داد، به فلاسفه واگذار می‌کند! در شکل ۱۰ اثباتی هندسی از این اتحاد نمایش داده شده است که در چارچوب

نسبت پاره‌خط‌ها در تشابه، به‌گونه‌ای که در فصل شش اصول اقلیدس آمده است، می‌گنجد.



شکل ۱۰. $\overline{OU}=\overline{OU'}=1$، $\overline{OA}=a$، $\overline{OB}=b$، $\overline{OC}=c$، $\overline{OD}=\frac{a}{b}$، $\overline{OE}=\frac{b}{c}$، $\overline{OF}=\frac{a}{c}$

همانند برهان خیام، در اینجا نیز از مفهوم واحد کمک گرفته می‌شود، ولی مشخص است که انتخاب واحد، اثری بر نتیجهٔ نهایی (صحّت اتحاد بالا) ندارد. این برهان ممکن بود در فصل شش کتاب اقلیدس ظاهر شود، ولی ظاهراً اکراه وی در اتخاذ واحد برای کمیّت‌های پیوسته، مانع از این اقدام شده بود.

۸ کوشش‌های غیرخطی

دایره که به‌تعبیری ساده‌ترین شکل هندسیِ غیرخطی است، در آغاز کتاب اقلیدس معرفی می‌شود، ولی به‌استثنای استفاده‌هایی نزدیک به تعریف از آن، در فصل‌های یک و دو، مطالعه و کاربرد آن به فصل‌های سه و چهار موکول می‌گردد. یک موضوع کلیدی، مفهوم خط مماس بر دایره است. تعریفی که اقلیدس از مماس ارائه می‌کند، خطی است که با دایره در نقطه‌ای برخورد دارد ولی هر اندازه که در هر طرف ادامه یابد، برخورد دیگری نخواهد داشت. البته با توجه به تحدّب دایره، این تعریف درست است و مشابه آن هم که بعداً دیگران برای مقاطع مخروطی مطرح می‌کنند، به همین دلیل صادق می‌ماند. قدما که گهگاه خم‌های پیچیده‌تری را نیز بررسی می‌کردند، قاعدتاً از ضعف این تعریف آگاه بودند. در چارچوب تفکر ارسطویی، تعریف می‌بایست بر اساس ذاتی‌ترین و کلی‌ترین ویژگی مورد نظر ارائه شود نه با تکیه بر یک ویژگی عارضی یا فرعی. می‌توان استدلال کرد که بزرگترین

ناکامی ریاضیات باستان، ناتوانی در ارائهٔ یک تعریف کلی و ذاتی از مماس بود. البته تعریف کلی مماس بودنِ دو خم عملاً مستلزم معرفی مفاهیم اولیهٔ حساب دیفرانسیل، یعنی حد و مشتق، دست‌کم به‌صورت شهودی بود. این اقدام هم با توجه به فقدان مفهومی کلی برای عدد حقیقی، به‌دلیل وسواس ارسطویی دربارهٔ جداسازیِ نسبت‌های گویا (حسابی) و ناگویا (هندسی)، نامیسر یا دست‌کم دشوار می‌نمود.[۱]

از سوی دیگر، پیشرفت‌هایی در همین دوره در زمینهٔ مقدمات حساب انتگرال صورت گرفت که روش افنا که ابداع آن به اِئودُکسوس نسبت داده می‌شود، تجلّی آن است. این روش نخستین‌بار در برهان گزارهٔ ۲ فصل دوازده کتاب اقلیدس ظاهر می‌شود. گزاره به این مضمون است که نسبت مساحت دو دایره برابر با نسبت مجذور شعاع‌های آنها است؛ معادلاً نسبت مساحت هر دایره به مجذور شعاع آن، مقداری ثابت است. نخست در گزارهٔ ۱ این فصل ثابت می‌شود که برای چندضلعی‌های متشابه محاط در دو دایره، نسبت مساحت‌های دو چندضلعی برابر با نسبت مجذور شعاع‌های دو دایره است و سپس با یک روش دقیق حدگیری که همان روش افنا باشد، موضوع به مساحت دایره‌ها تعمیم می‌یابد. روش حدگیری به این صورت است: در گام اول، در هر دایره مربعی محاط می‌شود؛ در گام دوم، با نصف کردنِ هر یک از چهار کمان منتهی به رئوس مربع، یک هشت‌ضلعی در دایره محاط می‌شود؛ با تکرار نصف کردن کمان‌ها در گام‌های بعدی، دنباله‌ای مانند P_n از ۲^nضلعی‌های محاط در دایره، $n \geq ۲$، ساخته می‌شود. متناظراً با رسم مماس بر دایره در رئوس P_n، یک ۲^nضلعی محیطی به‌نام Q_n در نظر گرفته می‌شود.[۲] سپس نشان داده می‌شود که با افزایش تعداد رئوس، می‌توان تفاضل مساحت Q_n و مساحت P_n را از هر مقدار داده‌شده کوچکتر کرد. به بیان امروزی، حد مشترکی برای مساحت‌های دو دنباله وجود دارد که همان مساحت درون دایره است. این فرایند برای دو دایره اجرا می‌شود و از آنجا که در هر مرحله نسبت مساحت چندضلعی به مجذور شعاع برای دو دایره برابر است، در حد نیز چنین خواهد بود. برای اینکه تفاضل مساحت‌های Q_n و P_n به‌دلخواه کوچک شود، از گزارهٔ اول فصل ده به این شرح استفاده می‌شود: هرگاه دو کمیّتِ نابرابر داده شده باشند، با نصف کردن متوالیِ کمیّت بزرگتر، می‌توان به مقداری کوچکتر از کمیّت کوچکتر رسید. برهان اِئودُکسوس که به روش افنا معروف شده است، ضوابط اثبات دقیق امروزی را دارد و سرمشق برهان‌های دیگری در فصل دوازده و استدلال‌های ارشمیدس

۱. البته ساخت‌گرایان دوران جدید نیز از به رسمیت شناختنِ نسبت‌های ناگویا به‌عنوان عدد، رضایت ندارند. برخی مانند براوئر مدل‌های دیگری از اعداد حقیقی در نظر دارند، ولی بعضی دیگر مانند بیشاپ [۳] با رویکردی متفاوت، عملاً به همان نتایج آنالیز متداول دست می‌یابند. ۲. در واقع جزئیات اندکی متفاوت است، ولی تأثیری در نتیجه ندارد.

در دوران بعد و دیگران در دوران باستان و نیز دورهٔ ریاضیات تمدن اسلامی قرار گرفته است.

شگفت‌آورتر از نیاز به روش افنا برای محاسبهٔ مساحت گوی دو بُعدی که محصور به خم غیرخطی دایره است، روش محاسبهٔ حجم هرم است، زیرا هرم از هر طرف به وجهی مسطح محصور می‌باشد. در بخش «مساحت و ضرب نسبت‌ها» دیدیم که با مرجع قراردادنِ مربع، می‌توان با مثلث‌بندی به مساحت درون همهٔ چندضلعی‌ها دست یافت. در قرن نوزدهم میلادی، ثابت شد که اگر دو چندضلعی مساحت برابر داشته باشند، می‌توان با تجزیهٔ متناهی به چندضلعی‌های کوچکتر و بازآرایی، یکی را به دیگری تبدیل کرد.[۱] ممکن است طبیعی به نظر برسد که رویکردی مشابه در سه بُعد با استفاده از مکعب‌ها و تجزیه به چندوجهی‌های ساده، عملی باشد. بی‌شک باید قدما کوشش زیادی را در این زمینه متحمل شده باشند، ولی نتیجهٔ موفقیت‌آمیزِ فصل دوازده مبتنی بر روش افنا است نه رویکردی مشابه مساحت چندضلعی‌ها که بعدها معلوم شد عملی نبوده است. به‌دنبال بررسی مساحت دایره که در بالا آمد، طی چند گزاره و با استفاده از روش افنا، ثابت می‌شود که برای دو هرم با قاعدهٔ مثلثی و ارتفاع برابر، نسبت حجم‌ها برابر با نسبت مساحت قاعده‌ها است (گزارهٔ ۵، فصل دوازده). سپس طی دنباله‌ای از گزاره‌ها با اثبات اینکه حجم هرم با قاعدهٔ مثلثی، یک‌سوم حجم منشور با همان قاعده است و استفاده از نتایج فصل یازده در مورد حجم منشور، حجم اجسام کلاسیک از قبیل هرم، استوانه، مخروط و نهایتاً کره با ترکیبی از استدلال هندسی و روش افنا بررسی می‌شود. مورد کره از پیچیدگیِ قابل‌ملاحظه‌ای برخوردار است. آخرین گزارهٔ فصل دوازده بیان این مطلب است که حجم کره‌ها به نسبت مکعب شعاع آنها است؛ معادلاً نسبت حجم درون کره به مکعب شعاع، مقداری ثابت است. به نظر نمی‌رسد که رابطهٔ این مقدار ثابت (به نماد امروزی، $\frac{۴}{۳}\pi$) و مقدار ثابت نسبت مساحت درون دایره به مجذور شعاع (عدد π) جایی در کتاب اقلیدس به‌صراحت ذکر شده باشد. همچنین باید اشاره کرد که نسبت محیط دایره به شعاع، در کتاب اقلیدس مطرح نمی‌شود و محاسبهٔ آن بعداً در رساله‌ای از ارشمیدس آمده است.

در قرن نوزدهم میلادی، گاوس در نامه‌ای به یک همکار ابراز تأسف می‌کند از اینکه روشی صرفاً هندسی بدون استفاده از افنا (معادلاً حساب انتگرال)، برای محاسبهٔ حجم هرم در دست نیست و در سال ۱۹۰۰، هیلبرت مسئلهٔ سوم از ۲۳ مسئلهٔ مشهور خود را به این موضوع اختصاص می‌دهد.[۲] به‌طور خاص، هیلبرت این سؤال را مطرح می‌کند که اگر یک مکعب و یک چهاروجهی حجم برابر داشته باشند، آیا لزوماً می‌توان با تجزیهٔ متناهی مکعب به چندوجهی‌ها و بازآرایی، آن را به

---

۱. این مطلب به قضیهٔ Wallace-Bolyai-Gerwien معروف است. ۲. متن مسئلهٔ سوم هیلبرت و نقل او از نامهٔ گاوس را می‌توان در [۷] یافت.

چهاروجهیِ داده‌شده تبدیل کرد؟ از قضا این اولین مسئلهٔ هیلبرت بود که به پاسخ رسید. ماکس دِن[1] که از شاگردان هیلبرت بود، ضمن ارائهٔ جواب منفی به سؤال، ناوردایی پیدا کرد که کلید بازسازیِ یک چندوجهی به چندوجهی هم‌حجم دیگر است.[2]

در اینجا لازم است اضافه کنیم که کوشش‌های متمادی برای دقیق‌سازی هندسهٔ اقلیدسی بر اساس اصول موضوع مکفی به‌دنبال عدم موفقیت در استخراج اصل پنجم اقلیدس از سایر اصول، و پذیرش عمومی هندسه‌های نااقلیدسی، با ظهور اثر معروف هیلبرت با عنوان مبانی هندسه[3] در سال‌های آخر قرن نوزدهم به نتیجه نشست. هیلبرت موفق شد هندسهٔ اقلیدسی را بر اساس پنج دسته اصول موضوع که هر دسته بیانگر جنبه‌ای از ساختار غنی هندسهٔ اقلیدسی است، بازسازی کند. هریک از مراجع [۱۳، ۶، ۴] حاوی شرحی از کار هیلبرت و حواشی آن است.

۹ هندسهٔ فضایی

همان‌طور که قبلاً اشاره شد، سه فصل آخر کتاب اقلیدس معطوف به هندسهٔ فضای سه‌بُعدی است که مورد فصل دوازده را در بالا بررسی کردیم. فصل یازده با گزاره‌های اولیه برای تحکیم سه‌بُعدی بودنِ فضا آغاز می‌شود که چنان‌که قبلاً یاد کردیم، یکی از این گزاره‌ها می‌بایست به‌عنوان اصل اتخاذ می‌شد. سپس گزاره‌هایی دربارهٔ خطوط و صفحات موازی یا عمود بر هم مطرح می‌شود که قضیهٔ سه عمود، شاخص‌ترین آنها است. موضوع بعدی زاویهٔ فضایی و زاویهٔ کنج است که در مورد اخیر، نامساوی مثلثی برای سه زاویهٔ رأس یک هرم سه‌بَر ثابت می‌شود. باقیماندهٔ فصل یازده به بررسی حجم متوازی‌السطوح و نیز حجم منشور با قاعدهٔ مثلث اختصاص دارد که بعداً در فصل دوازده از آنها استفاده شده است. توجه کنید که منشور مثلثی را می‌توان با مضاعف کردن قاعده به یک متوازی‌الاضلاع و تداوم در جهت یال جانبی به یک متوازی‌السطوح با دو برابر حجم تبدیل کرد.

فصل سیزده را باید نمایش اوج مهارت و ابتکار هندسی در دورهٔ دوم ریاضیات یونانی محسوب کرد. هدف کل فصل، شناخت و رده‌بندی چندوجهی‌های منتظم (محدّب) قابل‌محاط کردن در کره (معروف به احجام افلاطونی) است. در آغاز، بررسی هندسیِ مبسوطی از نسبت طلایی و مقایسهٔ طول ضلع‌های پنج‌ضلعی، شش‌ضلعی و ده‌ضلعی منتظم محاط در یک دایره صورت می‌گیرد که کاملاً متّکی بر استدلال‌های هندسی است. نکته اینکه مقدار عددیِ نسبت طلایی ($(\sqrt{۵}+۱)۲^{-۱}$) که

۲. در حالت کلی، ناوردای دِن، عضوی از یک گروه آبلی است. مطالعهٔ فصل ۵ از [۱۳] برای این مبحث توصیه می‌شود.

1. Max Dehn 3. *Grundlagen der Geometrie*

می‌توانست این کوشش را بسیار ساده‌تر کند، مکتوم می‌مانَد و استدلال‌ها هندسیِ محض است.[۱] پس‌از این مقدمهٔ نسبتاً طولانی، شیوهٔ محاط کردنِ تک‌تک پنج جسم افلاطونی و محاسبهٔ طول یال آنها تشریح می‌شود که این نیز بحثی به‌نسبت طولانی است. در پایان فصل و کتاب، ثابت می‌شود که هیچ چندوجهی منتظم محدّب دیگری به‌غیراز این پنج جسم وجود ندارد که بتوان در کره محاط کرد. باید اشاره کنیم که شرط محدّب بودن به‌صراحت در متن نیامده است، ولی در برهانِ نهایی، به‌طور ضمنی فرض شده است که ادامهٔ صفحهٔ حامل هر وجه چندوجهی، به داخل چندوجهی دخول نمی‌کند. در قرن هفدهم میلادی یوهانس کپلر،[۲] و در قرن نوزدهم لویی پوانسو،[۳] هریک دو چندوجهی منتظم غیرمحدّب به این فهرست اضافه کردند.

گفتنی است که شکل‌های منتظم چهار وجهی، شش‌وجهی (مکعب)، هشت‌وجهی و بیست‌وجهی قبل از تأسیس آکادمی افلاطون شناخته شده بودند و فلاسفهٔ یونان آنها را به‌ترتیب به چهار عنصر اصلی مفروض آن زمان، یعنی آتش، خاک، آب و باد نسبت می‌دادند. کشف دوازده‌وجهی ظاهراً محصول آکادمی افلاطون است. ارسطو با اینکه مخالف نظریهٔ اتمی بود، اجسام سماوی را ساخته‌شده از عنصر دیگری به‌نام اثیر[۴] می‌پنداشت که به‌نحوی به دوازده‌وجهی مربوط می‌شد.

سپاسگزاری نگارنده از آقایان دکتر روح‌الله جهانی‌پور و دکتر علی کمالی‌نژاد که در امور فنی و ویرایش مقاله همکاری موثر داشتند بسیار سپاسگزار است. همچنین گفتگوهای مستمر با آقایان دکتر حسین معصومی همدانی و دکتر محمد اردشیر همواره راهگشا بوده است.

مراجع

[۱] افلاطون، دورهٔ آثار افلاطون، ترجمهٔ محمدحسن لطفی و رضا کاویانی، انتشارات خوارزمی، تهران، ۱۳۶۵.
[۲] اقلیدس، اصول اقلیدس (سیزده مقاله)، ترجمهٔ محمدهادی شفیعیها، مرکز نشر دانشگاهی، تهران، ۱۳۸۸.
[۳] فان آتن، مارک، فلسفهٔ براوئر، ترجمهٔ محمد اردشیر، هرمس، تهران، ۱۳۸۷.
[۴] گرینبرگ، ماروین جی.، هندسه‌های اقلیدسی و نااقلیدسی و بسط آن، ترجمهٔ محمدهادی شفیعیها، مرکز نشر دانشگاهی، تهران، ۱۳۹۵.
[5] Bishop, E., Bridges, D., *Constructive Analysis*, Springer-Verlag, Berlin, 1985.
[6] Borsuk, K., Szmielew, W., *Foundations of Geometry*, North-Holland, Amsterdam 1960.

---

۱. دکارت در کتاب هندسهٔ خود [۹] و نوشته‌های دیگر، ضمن انتقاد از قدما در مورد امتناع از محاسبه در مسائل هندسی، این ظن را نیز مطرح می‌کند که شاید ریاضی‌دانان قدیم در خفا از محاسبه استفاده می‌کرده‌اند، ولی برای ارائهٔ علنیِ آثار خود، به روش هندسی متوسّل می‌شدند. بسیاری از مطالب فصل ده و بخشی از فصل سیزده کتاب اقلیدس می‌تواند تأییدیه‌ای بر این ظن باشد.

2. Johannes Kepler 3. Louis Poinsot 4. Ether

[7] Browder, F., ed., *Mathematical Developments Arising from Hilbert Problems*, Part 1, American Mathematical Society Providence, 1976.
[8] Dedekind, R., *Essays on the Theory of Numbers*, Dover, New York, 1963.
[9] Descartes, R., *The Geometry of*, Dover, New York, 1954.
[10] Ebbinghaus, H.-D., et al, eds., *Numbers*, Springer-Verlag, Berlin, 1991.
[11] Fowler, D., *The Mathematics of Plato's Academy*, 2nd ed., Clarendon Press, Oxford, 1999.
[12] Hamilton, E., Cairns, H., eds., *The Collected Dialogues of Plato*, PUP, Princeton, 1961.
[13] Hartshorne, R., *Geometry, Euclid and Beyond*, Springer-Verlag, Berlin, 2000.
[14] Khinchin, A,. *Continued Fractions*, University of Chicago Press, Chicago, 1964.
[15] Knorr, W., *The Evolution of the Euclidean Elements*, D. Reidel, Dordrecht, 1975.
[16] Knorr, W., La Croix des Mathématiciens: The Euclidean theory of irrational lines, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **9** (1983), no.1.
[17] Landry, E. *Plato Was Not a Mathematical Platonist*, CUB, Cambridge, 2023.
[18] McKeon, R., ed., *The Basic Works of Aristotle*, The Modern Library, New York, 2001.
[19] Netz, R., *The Transformation of Mathematics in Early Mediterranean World: From Proofs to Equations*, CUB, Cambridge, 2004.
[20] Rashed, R., Vahabzadeh, B., *Omar Khayyam, the Mathematician*, Bibliotheca Persica, New York, 2000.
[21] Wedberg, A., *Plato's Philosophy of Mathematics*, Almqvist and Wiksell, Stockholm, 1955.

سیاوش شهشهانی: دانشگاه صنعتی شریف، دانشکدهٔ علوم ریاضی
رایانامه: shahshah@sharif.ir

Mathematical Culture and Thought
Volume 44, Number 2, Autumn/Winter 2025, Pages 1–26
doi: 10.30504/mct.2025.1579.2112

Plato's Academy and Euclid's Elements

S. Shahshahani

Department of Mathematical Sciences, Sharif University of Technology, Iran

Abstract. The millennium of classical Greek mathematics may be divided into three periods: The First Period encompasses the 6th and 5th centuries B.C. and the Second Period consists mainly of the 4th century B.C. up to early 3rd century. The end of this period coincides with the transfer of the focus of mathematics research from Plato's Academy to Alexandria and the appearance of Euclid's Elements. The mathematics of this period and its paradigmatic style of presentation in the Elements will be the subject of the present article. The long Third Period, which will not be discussed here, witnessed great advances in mathematics, but followed the general philosophical framework of the Second Period. The present manuscript is the expanded version of the talks given by the author in Esfahan Mathematics House and Tarbiat Modarres University, on 15 and 20 May, 2025, respectively.

Keywords: Greek mathematics, Plato's Academy, Elements of Euclid, number and ratio, Euclidean algorithm, exhaustion method, Platonic solids
Article history: Received 18 October 2025; Accepted 1 December 2025
Article type: original

1. shahshah@sharif.ir