فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۳۸ (بهار ۱۳۸۶) صص. ۶۳ تا ۶۵

برهان دیگری برای قضیهٔ اساسی جبر

خوزه کارلوس و سوزا الیویرا سانتوز[1]

مترجم: حمیدرضا وهابی

هدف این نوشته اثبات قضیهٔ اساسی جبر است. به عبارت دقیق‌تر، نشان می‌دهیم که درجهٔ یک چندجمله‌ای تحویلناپذیر در $\mathbb{R}[X]$ ۱ یا ۲ است. برای اثبات این که درجهٔ یک چندجمله‌ای تحویلناپذیر در $\mathbb{C}[X]$ مساوی با ۱ است می‌توان از روش مشابهی استفاده نمود.

فرض کنید n یک عدد صحیح بزرگ‌تر از ۱ و P یک چندجمله‌ای تحویلناپذیر درجه n در $\mathbb{R}[X]$ باشد. نشان می‌دهیم $n = ۲$. ایده‌ال تولیدشده توسط P در حلقهٔ $\mathbb{R}[X]$ را با $\langle P\rangle$ نشان می‌دهیم. از آنجایی که P تحویلناپذیر است، حلقهٔ خارج قسمتی $\mathbb{R}[X]$ بر $\langle P\rangle$ یک میدان است. اگر $\psi : \mathbb{R}^n \to \dfrac{\mathbb{R}[X]}{\langle P\rangle}$ را با

$$(a_۰, a_۱, \ldots, a_{n-۱}) \mapsto a_۰ + a_۱X + \ldots + a_{n-۱}X^{n-۱} + \langle P\rangle$$

تعریف کنیم، آنگاه ψ یک یکریختی گروهی از $(\mathbb{R}^n, +)$ به روی $(\dfrac{\mathbb{R}[x]}{\langle P\rangle}, +)$ است. این یکریختی به وضوح یک ساختار میدان روی $\mathbb{R}^n$ القا می‌کند که با ساختار معمولی آن متفاوت است. حاصلضرب دو عضو x و y از $\mathbb{R}^n$ با نماد $x.y$، و عضو همانی ضرب با نماد ۱ نشان داده شده است. این ضرب که یک تابع دو خطی از $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ به توی $\mathbb{R}^n$ است، پیوسته می‌باشد.

فرض کنید $|.|$ نرمی در $\mathbb{R}^n$ (نسبت به ساختار متداول فضای برداری حقیقی) باشد طوری که $|۱| = ۱$ و برای هر x در $\mathbb{R}^n$ تعریف کنید

$$||x|| = \sup_{|y|=۱} |x.y|.$$

1) Jose Carlos and Sousa Oliveira Santos

این نرم دقیقاً نرم مربوط به درونریختی $y \mapsto x.y$ از $\mathbb{R}^n$ است. بنابراین $||۱|| = ۱$ و برای هر x و y در $\mathbb{R}^n$، $||x.y|| \leq ||x||\,||y||$. سری‌های

$$\sum_{n=۰}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad , \qquad \sum_{n=۱}^{+\infty} (-۱)^{n+۱} \frac{(x-۱)^n}{n}$$

هر دو نسبت به این نرم به ترتیب در $\mathbb{R}^n$ و $\{x \in \mathbb{R}^n \mid ||x-۱|| < ۱\}$ مطلقاً و موضعاً به طور یکنواخت همگرا می‌باشند. مجموع این سری‌ها را، به ترتیب با $\exp(x)$ و $\log(x)$ نشان می‌دهیم. چون عمل ضرب جابجایی است، به سادگی می‌توان نشان داد که برای هر x و y در $\mathbb{R}^n$، $\exp(x+y) = \exp(x).\exp(y)$. به علاوه، هیچگاه $\exp(x) = ۰$ برقرار نیست، زیرا $\exp(x).\exp(-x) = \exp(x-x) = \exp(۰) = ۱$. بنابراین $\exp : (\mathbb{R}^n, +) \to (\mathbb{R}^n \backslash \{۰\}, .)$ به عنوان یک همریختی گروهی پیوسته تعریف می‌شود.

دقیقاً مشابه حالت ماتریسی (نگاه کنید به [۱، بخش ۱.۲] یا [۳، بخش ۴.ب]) می‌توان ثابت کرد برای هر x در $\mathbb{R}^n$ که $||x-۱|| < ۱$،

$$\exp(\log(x)) = x \qquad (۱)$$

و برای هر x در $\mathbb{R}^n$ که $||\exp(x) - ۱|| < ۱$،

$$\log(\exp(x)) = x. \qquad (۲)$$

از (۱) نتیجه می‌شود که اگر V یک همسایگی ۰ باشد، آنگاه $\exp(V)$ یک همسایگی ۱ است. بنابراین، چون exp یک همریختی گروهی است، نگاشتی باز خواهد بود. در نتیجه exp پوشاست. در واقع، اگر $G = \exp(\mathbb{R}^n)$، آنگاه G یک زیرگروه باز از $(\mathbb{R}^n \backslash \{۰\}, .)$ است، و اگر x متعلق به $(\mathbb{R}^n \backslash \{۰\}) \backslash G$ باشد، آنگاه

$$G.x \subset (\mathbb{R}^n \backslash \{۰\}) \backslash G.$$

بدین ترتیب متمم G در $\mathbb{R}^n \backslash \{۰\}$ نیز یک مجموعهٔ باز است. بنابراین، چون $\mathbb{R}^n \backslash \{۰\}$ همبند است، متمم G باید تهی باشد. به عبارت دیگر، $\exp(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n \backslash \{۰\}$.

از (۲) نتیجه می‌شود که $\ker(\exp)$ گسسته است و به وضوح (نگاه کنید به [۲، فصل ۷، بخش ۱.۱] یا [۴، بخش ۱۲.۱]) به جز وقتی که $\ker(\exp) = \{۰\}$، بردارهای مستقل خطی $v_۱, \ldots, v_m$ در $\mathbb{R}^n (m \geq ۱)$ وجود دارند به طوری که $\ker(\exp) = \bigoplus_{k=۱}^{m} \mathbb{Z}_{v_k}$. با توجه به این که exp یک نگاشت باز است نتیجه می‌گیریم که این نگاشت یک همانریختی از $\frac{\mathbb{R}^n}{\ker(\exp)}$ (که با $(S^۱)^m \times \mathbb{R}^{n-m}$ همانریخت است) به روی $\mathbb{R}^n \backslash \{۰\}$ القا می‌کند. اما اگر $n > ۲$، فضای $\mathbb{R}^n \backslash \{۰\}$ همبند ساده می‌شود، در حالی که $(S^۱)^m \times \mathbb{R}^{n-m}$ وقتی $۱ \leq m \leq n$ همبند ساده نیست.

برای اجتناب از تناقض، باید $\ker(\exp) = \{0\}$. بنابراین، $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ باید با $\mathbb{R}^n$ همانریخت باشد. ولی این غیرممکن است. این مطلب را می‌توان با استفاده از گروه‌های همولوژی اثبات کرد. روش دیگر اثبات این مطلب استفاده از این حقیقت است که در $\mathbb{R}^n$ هر مجموعهٔ فشردهٔ K زیرمجموعه‌ای است از مجموعهٔ فشردهٔ دیگری که متمم‌اش همبند است در حالی که $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ چنین نیست (برای مثال، $K = S^{n-1}$، کرهٔ واحد در $\mathbb{R}^n$، را در نظر بگیرید). بنابراین $n = 2$ و قضیه ثابت می‌شود.

مراجع

[1] A. Baker, Matrix Groups: An Introduction to Lie Group Theory, Springer-Verlag, Berlin, 2003.

[2] N. Bourbaki, General Topology, Chapters 5-10, Springer-Verlag, Berlin, 1998.

[3] M.L. Curtis, Matrix Groups, 2nd ed., Springer-Verlag, Berlin, 1987.

[4] J.J. Duistermaat and J. A. C. Kolk, Lie Groups, Springer-Verlag, Berlin, 2000.

مترجم: حمیدرضا وهابی

دانشگاه آزاد اسلامی واحد اسلامشهر

hrvahabi@yahoo.com